EKSTREMUMLARNING GRADIENT METODI

Raxmonov Jamshidbek Turdaliyevich - Guliston davlat pedagogika instituti “Aniq fanlar” kafedrasi katta o‘qituvchi
Elmurodova Muxsina Baxrom qizi - Guliston davlat pedagogika instituti talabasi
Abdullayeva Fazilat – GULDPI talabasi.

Annotatsiya. Ushbu maqolada Ekstremum masalalarini echishda Gradientlar usulining nazariy asoslari va amaliy qo‘llanish yo‘llari o‘rgatiladi. Gradientlar usuli- bu maqsad funksiyaning ekstremumini topishda eng samarali va keng qo‘llaniladigan interatsion usullardan biridir. Maqolada Gradient tushunchasi, uning yo‘nalish bo‘yicha harakatlanish g‘oyasi hamda local minimum va maxsimum nuqtalarni aniqlashdagi roli yoritilgan. Shuningdek, metodning algoritimi, yaqinlashuv shartlariva uning konvergensiya xususiyatlari muhokama qilinadi. Misollar asosida usulninhg amaliy jihatlari ko‘rib chiqilib, u optimallashtirishda qandey iushlatilishi nomoyon etiladi. Maqola ilmiuy tadqiqot ishlarida hamda hisobblash matematikasi sohasida ishlovchi mutaxasislar foydali bolishi munkin.

Kalit so‘zlar: Gradient, funksiyaning ekstremumlari, metodlar, lokal minimum va maxsimum nuqtalar, natija, xulosa

Gradient - bu funksiyaning eng tez o‘sish yo‘nalishi va o‘sish tezligini korastadigan yo‘nalishdir. [2]

Ekstremum – bu funksiyaning eng kichik (minimum)yoki eng katta (maksimum) qiymatga ega bo‘ladigan bo‘ladigan nuqtadir.

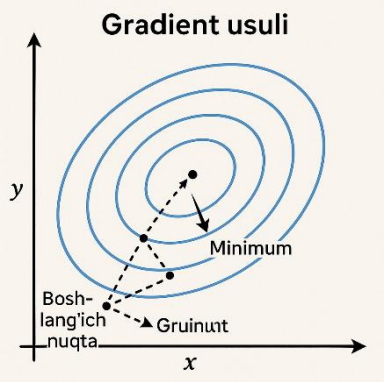
Funksiya quyidagi holatlarda extremumga ega boladi

Lokal minimum (atrofidagi nuqtalarga qaraganda qiymat kichik);

Lokal maxsimum (atrofidagi nuqtalarga qaraganda qiymat katta);

Global ekstremum(butun sohada eng kichik yoki eng katta qiymatga ega);[3]

Ekstremumning Gradient Metodi:



Faraz qilaylik, f(x) funksiyaning minimumini toppish masalasi qo‘yilgan, bu erda $xq(x_1,x_2\ldots\ldots x_m)$.

Aytaylik, biz biror *nuqtani* $x^0q(x_1{}^0,x_1{}^0,\ldots\ldots x_m{}^0)$ tanladik va shu nuqtada $f(x)$ funksiyaning gradientini hisoblaymiz:

$$gradf(x^0) \equiv \sum_{iq1}^{m} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} e_i$$

bu erda, $e_1,e_2,\ldots\ldots e_n$ - bu fazodagi R^n ortonarmalashgan bazis vektorlaridir.

Agar $\text{grad } f(x^0) \neq 0$ bo'lsa,unda quyidagicha faraz qilamiz:

$x_1^k q x_0^k - h_1 (grad\, f(x^0), e_k),\quad (kq1,2,....m)$

bu yuerda $h_1>0$ – etarlicha kichik son.

Agar $\text{grad } f(x^0) \neq 0$ bo'lsa, unda quyidagicha faraz qilamiz:

$x_2^k q x_1^k - h_2 (grad\, f(x^1), e_k),\quad (h_2>0),$

va umuman,agar grad $f(x^{n-1}) \neq 0$ bo'lsa unda:

$x_n^k q x_{n-1}^k - h_n (grad\, f(x^{n-1}), e_k),\quad (kq1,2,....m),\quad (h_2>0).$

Bu formulalar asosida biz $f(x^n)$ funksiyaning kamayuvchi ketma- ketligini hosil qilamiz.Agar $x^n \to \bar{x}$ bo'lsa va $\bar{x}$ - bu funksiyaning minimum nuqtasi bo'lsa,u holda grad $f(x^0) \neq 0$ bo'ladi qachonki,n→∞ da.

Misollarda ko'rib chiqamiz:

1-misol: Funksiyaning minimum nuqtasini toping?

$f(x)qx$ $x^0=1$ deb olamiz. Unda:

grad $f(x^0)=2x^0i=2i$ demak:

$x^1=x^0-h_1*2i=1-2h_1$ keyin: $grad\, f(x^1)=2x^1i=2(1-2h_1)i.$

Agar $h\neq 1/2$ bo'lsa,u *holda* $x^2=x^1-h*2(1-2h_1)\, i=(1-2h_1)^2$.

Shu jarayonni davom ettirib,topamiz: $x^n=(1-2h)^n$.

Yaqqol ko'rinib turibdiki, agar $0<h<1$ bo'lsa, unda $x^n \to 0$ bo'ladi, qachonkii $n\to \infty$ *da.* Demak, $x=0$ bu $f(x)=x^2$ funksiyaning minimum nuqtasi.

Agar $h=1/2$ bo'lsa, u holda $x^1=0$ grad $f(x^1)=0$, va biz statsionarr ketma ketlik olamiz: 0, bu erda limt ham nol bo'ladi.

2-misol: Funksiyaning minimumini toping:

$f(x,y)=x^2+y^2$

Masalan nuqtani $x^0=1$, $y^0=1$ ya`ni (1,1) deb olamiz.Unda;

$grad\, f(1,1)=2i+2j.$

Shartli ekstremum

Shundey qilib, gradf(1,1) ≠0 deb faraz qilamiz.

$x^1=x^0-2x^0h=1-2h,\quad (h>0)$

$y^1=y^0-2y^0h=1-2h,$

Demak, $\text{gradf}(x^1,y^1) = 2(1-2h)\,i+2((1-2h)\,i\neq 0 \quad (h\neq 1/2)$

shuning uchun quyidaguicha davom etamiz:

$x^2=x^1-2x^1h=(1-2h)^2$, $y^2=y^1-2y^1hq(1-2h)^2$, $(h>0)$, $(h\neq 1/2)$

Ushbu jarrayonni davom ettirib,quyidagilarga ega bo'lamiz:

$x^n=(1-2h)^n$, $y^n=(1-2h)^n$.

Shunday qilib, agar $0<h<1$ bo'lsa $x^n \to 0$ va $y^n \to 0$ bo'ladi, ya'ni nuqtalar ketma-ketligi $M_n(x^n,y^n)$ funksiyaning $M(0,0)$ minimum nuqtasiga aylanadi.

Demak, $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning minimum nuqtasi bu (0,0) nuqtadir.[4]

Lokal minimum va maxsimum nuqtalar:

- Lokal maxsimum nuqta –funksiya $f(x)$ ning nuqtasi $x=a$ local maxsimum nuqtasi deyiladi agar: $f(a)\geq f(x)$ yaqin atrofdagi barcha x lar uchun ya`ni, *xqa* nuqtasi yaqinida funksiyaning qiymati eng kata bo'ladi.

- Lokal minimum nuqta –Funksiya f(x) ning nuqtasi *xqa* local minimum nuqtasi deyiladi agar: $f(a) \leq f(x)$ yaqin atrofdagi barcha x lar uchun ya`ni, *xqa* nuqtasi yaqinida funksiyaning qiymati eng kichik bo'ladi.

Funksiyadan olingan 1- tartibli hosila funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi munkin.Shundan keyin agar 2- tartibli hosilasi noldan kichik bolsa bu local maksimum agar kata bo'lsa bu lokal minimum deyiladi [1].

Ekstremumlarni topishda gradient metodi (Gradient) quyidagi jihatlari bilan boshqa metodlardan afzal bo'lishi mumkin:

Gradient metodi katta o'lchamli (ko'p o'zgaruvchili) funksiyalar uchun juda mos keladi, chunki u har bir iteratsiyada nisbatan kam hisob-kitob talab qiladi. Sonli hosilalardan foydalanadigan boshqa metodlarga nisbatan gradient metodi kompyuter resurslarini kamroq ishlatadi (ayniqsa, analitik gradient mavjud bo'lsa)Algoritmi sodda va dasturlashga qulay, ayniqsa chuqur o'rganish (deep learning) kabi sohalarda keng qo'llaniladi.Gradientni hisoblashni (ayniqsa, neyron tarmoqlarda) bir nechta protsessorga yoki GPUga tarqatish mumkin, bu esa algoritmni tezlashtiladi [4].

Gradient metodining kamchiliklari:

Gradient metodi global minimumni emas, balki eng yaqin mahalliy minimumni topadi. Noto'g'ri boshlang'ich nuqtadan boshlangan bo'lsa, aniq echimga etmasligi mumkin.Juda katta bo'lsa – algoritm sakrab yuradi, ekstremumni o'ta olmaydi (divergentsiya qiladi). Juda kichik bo'lsa – konvergentsiya (yaqinlashish) juda sekin bo'ladi.Bu qiymatni to'g'ri tanlash tajriba talab qiladi.Agar funksiya konturi cho'zilgan yoki gradientlar juda kichik bo'lsa, algoritm sekinlashadi. Hosila (gradient) bo'lmagan joylarda ishlay olmaydi [1].

Xulosa

Gradient metodiga xulosa (ekstremum topish nuqtai nazaridan):

Gradient metodi - bu funksiyaning ekstremumlarini (odatda minimumini) topishda ishlatiladigan eng samarali va amaliy usullardan biridir, ayniqsa katta o'lchamli, murakkab va silliq funksiyalar bilan ishlaganda. Uning oddiyligi, moslashuvchanligi va kompyuter resurslarini tejamkor ishlatishi uni mashina o'rganish, sun'iy intellekt va ilmiy hisoblash sohalarida keng qo'llashga sabab bo'lgan.

Shu bilan birga, bu metod faqat lokal ekstremumni topadi va boshlang'ich nuqtaga juda bog'liq. Gradientni to'g'ri aniqlash, qadam uzunligini mos tanlash va lokal tuzoqlardan qochish strategiyalari (masalan, momentum, adaptiv algoritmlar) bilan bu kamchiliklarni kamaytiradi.Gradientb metodidan foydalangan holda masala aniqlikka yanada yaqinlashadi .

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Matematik analiz – M. G'ulomov, A. Musurmonov

2. Optimallashtirish usullari – O'zbekiston Oliy ta'lim darsliklari (O'zMU yoki TATU nashrlari)

3. Мухин С.В. - Численные методы оптимизации

4. М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. 1973 год