MATEMATIK INDUKSIYA METODINING TASDIQLARNI ISBOTLASHDAGI AHAMIYATI

Rabbimqulov Bekzod - Guliston davlat pedagogika instituti o‘qituvchi

Annotatsiya: Ushbu maqolada matematik induksiya metodi haqidagi asosiy tushuncha va tamoyillarga qisqacha to‘xtalib o‘tilgan. Shuningdek bir qancha matematik ayniyatlar, tenglama va tengsizliklarning isboti matematik induksiya metodi yordamida ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Induksiya, deduksiya, ayniyat, tengsizlik, matematik induksiya.

Matematika (algebra) kursining o‘quvchilar uchun eng qiziq mavzularidan biri bu matematik ayniyatlar, tengsizliklarni isbotlash hisoblanadi. Ayniyatlarning isbotini o‘quvchilarga bir necha xil usullarini ko‘rsatib berish fan o‘qituvchisining asosiy vazifasidir. Bu esa o‘z navbatida o‘quvchilarda bir muammoni turli xil usullar yordamida hal etish qobiliyatini shakllantirishga xizmat qiladi. Ushbu maqolada ba’zi matematik tenglama va tengsizliklarning isbotini matematik induksiya metodi yordamida ko‘rsatib o‘tamiz.

Induksiya – xususiy kuzatishlar natijasida olingan natijalardan umumiy xulosaga (tasdiqga) kelish usulidir. Demak, xususiy tasdiqdan umumiy tasdiqga o‘tish induksiya deyilar ekan. **Deduksiya** esa umumiy tasdiqdan xususiy tasdiqga o‘tish hisoblanadi.

Matematik induksiya metodi - matematikada xususiy natijalarni isbotlashda ishlatiladigan qulay va samarali usul bo‘lib, odatda nisbatan aniq yoki umumiy formula yoki xulosani ko‘rsatishda qo‘llaniladi. Ushbu metod, biror matematik xulosaning barcha natural sonlar uchun to‘g‘riligini isbotlashda keng qo‘llaniladi. Matematik induksiya metodini tushunish va to‘g‘ri ishlatish matematikada murakkab muammolarni hal qilishda katta yordam beradi. XIX asrning ikkinchi yarmigacha matematik induksiya metodi asosiy isbotlash usuli hisoblangan.

Matematik induksiya metodining asosiy mohiyati quyidagichadir: agar biror **A(n)** tasdiq (formula) $n = 1$ da (yoki n ning bu tasdiq ma’noga ega bo‘ladigan boshqa qiymatida) o‘rinli bo‘lsa va biror $n = k$ natural qiymat uchun to‘g‘ri deb faraz qilinib, navbatdagi natural $n = k + 1$ uchun ham to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda **A(n)** tasdiq barcha natural n sonlar uchun to‘g‘ri degan xulosaga kelinadi.

Matematik induksiya metodini faqat natural n ga bog‘liq bo‘lgan tasdiqlarnigina isbot qilishga tatbiq qilish mumkinligi ravshanlashadi. Asosan bu metoddan quyidagi ikki ko‘rinishdagi masalalarni yechishda foydalaniladi:

Xususiy kuzatishlardan foydalanib, qandaydir qonuniyat aniqlanadi, so‘ngra uning to‘griligi matematik induksiya metodi yordamida isbotlanadi;

Biror formulaning (ayniyat, tengsizlik) to‘g‘ri ekanligi matematik induksiya metodi orqali isbotlanadi.

Keling endi matematik induksiya metodining qo‘llanilishini ba’zi misollarni ko‘rib chiqamiz.

1-masala. Dastlabki n ta natural sonlar kvadratlarining yig'indisi $\frac{\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}}{\boldsymbol{6}}$ ga teng ekanini isbotlaymiz.

Tasdiqning $n = 1$ da to'g'riligini tekshiramiz. $\boldsymbol{S}(1) = 1^2 = 1$ va formulaga ko'ra $\boldsymbol{S}(1) = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6} = 1$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $n = 1$ da formula o'rinli.

Formula $n = k$ da o'rinli deb faraz qilamiz, ya'ni $\boldsymbol{S}(k) = 1^2 + 2^2 + +3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Bu farazga tayanib, formulaning $n = k + 1$ uchun ham to'g'ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham

$$\boldsymbol{S}(k+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \boldsymbol{S}(k) + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Shunday qilib, formulaning $n = k + 1$ uchun to'g'riligini isbot qildik. Demak, matematik induksiya metodiga ko'ra berilgan formula barcha natural n son uchun o'rinli.

2-masala. Ixtiyoriy n natural son uchun $n! > (\frac{n}{3})^n$ tengsizlik to'griligini isbotlang.

Tengsizlikni $n = 1$ da tekshiramiz. $1! > (\frac{1}{3})^1$ tengsizlik o'rinli.

$n = k$ da $k! > (\frac{k}{3})^k$ tengsizlikni to'g'ri deb faraz qilamiz.

Endi $n = k + 1$ da tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz.

$$(k+1)! > (\frac{k+1}{3})^{k+1}$$

$(k+1)! = k!\cdot(k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k \cdot (k+1)$. Buni $(\frac{k+1}{3})^{k+1}$ ko'paytirib bo'lamiz.

$$\left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1)\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\frac{3^{k+1}k^k(k+1)}{3^k(k+1)^{k+1}} =$$
$$= (\frac{k+1}{3})^{k+1}\frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} \approx \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\frac{3}{e} > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

Demak, $n = k + 1$ da ham $(k+1)! > (\frac{k+1}{3})^{k+1}$ tengsizlik o'rinli ekanligini isbotladik.

Matematik induksiya metodiga ko'ra berilgan tengsizlik barcha natural n son uchun o'rinli.

Mustaqil yechish uchun misollar:

1. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$, ixtiyoriy $n \geq 2$ da.
2. $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, n \in N.$
3. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, n \in N.$
4. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ n \in N, n \geq 2.$

Yuqoridagi ayniyat va tengsizliklarni matematik induksiya metodi yordamida isbotlashga urinib ko‘ring.

Matematik induksiya metodining afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari:

- Bu metod matematik xulosalarni isbotlashda kuchli vositadi.
- Ko‘plab xulosalar, formulalar va natijalarni isbotlashda ishlatiladi.
- Oddiy va to‘g‘ri bajarilishi oson bo‘lishi mumkin.

Kamchiliklari:

- Ba’zida induksiya qadamini to‘g‘ri olib borish qiyin bo‘lishi mumkin.
- Natural sonlar uchun bo‘lgan umumiy xulosalarni isbotlashda ba’zida noto‘g‘ri qadamlar yoki xatoliklar kiritilishi mumkin.

Xulosa qilish mumkinki, har bir fanni egallash undagi turli-tuman faktlarni, asosiy qonuniyatlarni bilib olish bilan birga shu fandagi tadqiq qilish metodlarini o‘zlashtirishni ham taqozo qiladi. Matematik induksiya metodi matematikaning turli, hatto bir-biridan juda olis sohalarida muvaffaqiyat bilan keng qo‘llaniladigan metoddir. Bu metod o‘zining juda soda bo‘lgan g‘oyasi bilan e’tiborga sazovordir. Matematik induksiya metodi, aniq formulalar va xulosalarni isbotlashda samarali usul bo‘lib, matematikada keng qo‘llaniladi. Bu metodni o‘rganish va to‘g‘ri ishlatish, turli matematik masalalarni yechishda yordam beradi. Shuning uchun ham ushbu maqola matematikani o‘rganuvchilar qiziquvchilar uchun kerakli hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. B.A.Abduraxmonov. Matematik induksiya metodi. Toshkent. 2008.
2. Sh.Ismailov, A.Qo‘chqorov, B.Abdurahmonov. Tengsizliklar-I. Isbotlashning klassik usullari. Toshkent. 2008.
3. I.S.Petrakov. matematika to‘garaklari. Toshkent. 1997.
4. Harris, R. L., & Stocker, W. L. (2011). Introduction to Mathematical Logic (6th ed.). Prentice Hall.