MULTIPLIKATIV FUNKSIYALAR

Bomurotov Sherbek Najmiddinovich - Guliston davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi,
Narimonov Djaxongir Janibekovich - Guliston davlat pedagogika instituti talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada sonlar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri bo‘lgan multiplikativ funksiyalarning asosiy xossalari, ularning tasnifi va qo‘llanilish sohalari ko‘rib chiqilgan. Avvalo, multiplikativ funksiyaning ta’rifi va oddiy misollar (masalan, Eulerning φ funksiyasi, Möbius funksiyasi va Dirichlet belgisi) bilan tanishtiriladi. Keyinchalik, ushbu funksiyalarning asosiy algebraik va arifmetik xossalari, ayniqsa, Dirichlet konvolyutsiyasi bilan bog‘liq munosabatlar yoritiladi. Maqolada multiplikativ funksiyalarning analitik sonlar nazariyasidagi o‘rni, ularning zeta funksiyasi bilan aloqasi va taqsimotga oid qo‘llanmalari ham muhokama qilingan. Nazariy ma’lumotlar bilan bir qatorda, misollar va mashqlar orqali mavzuning amaliy jihatlari ham ochib beriladi. Maqola oliy o‘quv yurtlari talabalari va sonlar nazariyasiga qiziquvchi tadqiqotchilar uchun mo‘ljallangan.

Multiplikativ funksiyalar. Arifmetik funksiya f **multiplikativ** deyiladi, agar: f(1)=1 va f(mn)=f(m) f(n) har qanday o‘zaro tub natural sonlar m va n uchun bajarilsa.

Multiplikativ funksiya f **to‘liq multiplikativ** deyiladi, agar: f(mn)=f(m) f(n) har qanday natural sonlar m va n uchun bajarilsa.

Masalan, f(n)=n^{α} funksiyasi har qanday haqiqiy α uchun to‘liq multiplikativ funksiyadir, chunki: f(mn)=$(mn)^{\alpha}=m^{\alpha}n^{\alpha}$=f(m)f(n) har qanday natural m va n uchun bajariladi. [1]

Multiplikativ funksiyalarning xossalari.

1. Multiplikativ funksiyalar ko‘paytmasi ham multiplikativ funksiyadir.

2. Agar f — **multiplikativ** funksiya bo‘lsa,

n=$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ ko‘rinishida ifodalanib, bu erda $p_1, p_2, \ldots, p_s$ - turli tub sonlar, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \in$ N, u holda quyidagi tenglik bajariladi[2]:

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{s}(1 + f(p_i) + f(p_i^2)+\ldots+f(p_i^{\alpha_i}))$$

3. Agar f-multiplikativ funksiya bo‘lsa, unda

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

funksiyasi ham multiplikativ funksiya bo‘ladi.[3]

4. Multiplikativ funksiya f tub sonlarning darajalari bo‘yicha aniqlanadi:

f($p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$)=f($p_1^{\alpha_1}$)f($p_2^{\alpha_2}$)…f($p_s^{\alpha_s}$). [4]

5. Agar funksiya f multiplikativ bo‘lsa, har qanday natural m va n sonlari uchun quyidagiga teng bo‘ladi: f(m) f(n)=f((m,n)) f([m,n]) [5]

Har qanday natural son n ning bo‘luvchisi d quyidagi shaklda bo‘ladi:

n=$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ bu erda d=$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$ $0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \ldots,$ $0 \le \beta_s \le \alpha_s$ Shu sababli quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{0 \le \beta_i \le \alpha_i, i=1,2,\ldots,s} f(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}) =$$

Bu yig'indini ko'paytuvchiga ajratsak:

$$= \sum_{0 \le \beta_i \le \alpha_i, i=1,2,\ldots,s} f(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}) = \prod_{i=1}^{s} \sum_{0 \le \beta_i \le \alpha_i} f(p_i^{\beta_i}), \ ya'ni$$

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{s} (1 + f(p_i) + f(p_i^2) + \ldots + f(p_i^{\alpha_i}))$$

Xuddi shuningdek, agar m va n o'zaro tub bo'lsa, u holda ularning har qanday bo'luvchisi d quyidagi shaklda bo'ladi:

d=$d_1 d_2$ $d_1|$m, $d_2|$n, (d_1, d_2)=1 Shundan kelib chiqib:

$$\text{h(mn)} = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_1|\text{m}, d_2|\text{n}} f(d_1 d_2)$$

Multiplikativik xossasiga ko'ra:

$$\sum_{d_1|\text{m}, d_2|\text{n}} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2), \ yoki$$

h(mn)=h(m)h(n). Shu sababli h(n)=$\sum_{d|n} f(d)$ funksiyasi ham **multiplikativ** funksiya bo'ladi. [6]

Misollarni echish namunalari [7]

1.Quyidagi funksiyaning to'liq multiplikativ ekanligini tekshiring:

$$\text{f(n)}=\frac{1}{n^2}$$

Yechish:

Funksiya f(n)=$\frac{1}{n^2}$ to'liq multiplikativdir.Chunki har qanday natura m va n sonlar uchun:

$$\text{f(mn)}=\frac{1}{(mn)^2}=\frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2}=\text{f(m)} \cdot \text{f(n)}$$

Eyler teoremasi. [8]

O'zaro tub bo'lgana va m(m>1) sonlari uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\text{a}^{\varphi(\text{m})} \equiv 1(\text{modm}).$$

Isbot.

Aytaylik,φ(m)=cbo′lsin. m dan kichik va m bilan o′zaro tub bo′lgan turli $r_1, r_2, \ldots, r_c$ sonlari uchun $ar_1, ar_2, \ldots, ar_c$ sonlarini qaraymiz. U holda $ar_1=s_1(\text{modm})$, $ar_2=s_2(\text{modm}), \ldots.$, $ar_c=s_c(\text{modm})$

Bu erda $s_1, s_2, \dots, s_c$ lar o'zaro teng bo'lmagan sonlar. Haqiqatan, $s_i=s_j$ bo'lsa u holda

$ar_i=s_i(modm)$, $ar_j=s_j(modm)$ ekanligidan

$ar_i - ar_j = (s_i - s_j)(modm) = 0(modm)$ kelib chiqadi.

(a,m)=1 bo'lganligi uchun $r_i - r_j = 0(modm)$, ya'ni $r_i = r_j$.

Bu esa r_k sonlarining turli ekanligiga zid. [9]

Shuningdek, $s_1, s_2, \dots, s_c$ sonlarining barchasi m bilan o'zaro tub ekanligini ko'rish qiyin emas. Bundan esa

$r_1 \cdot r_2 \cdot \dots r_c = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots, \cdot s_c$ tenglik kelib chiqadi.

$ar_i=s_i(modm)$ taqqoslamalarni hadma-had ko'paytirsak,

$a^c \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \dots r_c = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots, \cdot s_c\,(modm)$ munosabatga ega bo'lamiz. Demak , $a^c \equiv 1(\text{mod m})$.

Agar Eyler teoremasida m soni o'rniga biror p tub olinsa , u holda tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$a^{p-1} \equiv 1(modp).$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini a ga ko'paytirsak,

$$a^p \equiv a(modp)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik Fermaning kichik teoremasi deyiladi. [10]

Misol. $2^{70} + 3^{70}$ yig'indining 13 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

Isbot: Ferma teoremasidan bizga ma'lumki $2^{12} \equiv 1(\text{mod } 13)$ o'rinli, taqqoslamani darajaga oshirib $2^{60} \equiv 1(\text{mod } 13)$ ni hosil qilamiz.

$2^5 \equiv 6(\text{mod } 13)$ taqqoslamadan $2^{10} \equiv 36(\text{mod } 13)$ni hosil qilamiz.

$2^{60} \equiv 1(\text{mod } 13)$ va $2^{10} \equiv 36(\text{mod } 13)$ taqqoslamalarni hadma – had ko'paytirib $2^{70} \equiv 36(\text{mod } 13)$ taqqoslamani hosil qilamiz. Endi

$3^3 \equiv 1(\text{mod } 13)$ taqqoslamani darajaga ko'tarib $3^{69} \equiv 1(\text{mod } 13)$ ga ega bo'lamiz. Hadlarini 3 ga ko'paytirib $3^{70} \equiv 1(\text{mod } 13)$ ni hosil qilamiz. $2^{70} \equiv 36(\text{mod } 13)$ va $3^{70} \equiv 1(\text{mod } 13)$ taqqoslamalarni hadma – had qo'shib $2^{70} + 3^{70} \equiv 36 + 3 \equiv 0(\text{mod } 13)$ ni hosil qilamiz.

Demak $2^{70} + 3^{70}$ yig'indi 13 ga qoldiqsiz bo'linadi.

Multiplikativ funksiyalar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

a) Ixtiyoriy multiplikativ funksiya uchun $\theta(1)=1$;

b) $\theta_1(a)$ va $\theta_2(a)$ multiplikativ funksiyalar bo'lsin, u holda $\theta_0(a)=\theta_1(a)\theta_2(a)$ ham multiplikativ funksiya bo'ladi.

Xulosa: Ushbu maqolada multiplikativ funksiyalar tushunchasi, ularning asosiy xossalari va arifmetik funksiyalar orasidagi o'rni atroflicha tahlil qilindi. Multiplikativ funksiyalar sonlar nazariyasining muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi va ular orqali ko'plab arifmetik munosabatlarni ifodalash, shuningdek, turli zeta funksiyalar va Dirixle konvolyutsiyasi kabi tushunchalarni chuqurroq anglash mumkin bo'ladi. Eulerning φ funksiyasi, Mo'bius funksiyasi, Dirixle belgisi kabi misollar orqali multiplikativ funksiyalarning amaliy ahamiyati ham ko'rsatildi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, multiplikativ funksiyalar nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki ularning ayrimlari kriptografiya, algoritmlar nazariyasi va kodlash nazariyasida ham muhim rol o‘ynaydi.

Takliflar:

1. Multiplikativ funksiyalar asosida yangi arifmetik funksiyalar yaratish va ularning xossalarini chuqur o‘rganish taklif etiladi.

2. Mazkur mavzuni chuqurroq anglash uchun Dirixle qatorlari, zeta funksiyasi va L-funksiyalarga oid mustaqil tadqiqotlar olib borilishi maqsadga muvofiq.

3. Multiplikativ funksiyalarni algoritmik jihatdan tadqiq etish, ularning hisoblash murakkabligini baholash va raqamli tizimlardagi qo‘llanilishini o‘rganish tavsiya etiladi.

4. Maktab va oliy ta’lim darsliklariga multiplikativ funksiyalar mavzusini yanada kengroq va amaliy misollar asosida kiritish zarur.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Александров В. А., Горшенин С. М. Задачник-практикум по теории чисел. М.: Просвещение, 1972.

2. Баврин И. И., Фрибус Е. А. Старинные задачи. М.: Просвещение, 1994.

3. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

4. Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.

5. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

6. Галкин В. Я., Сычугов Д. Ю., Хорошилова Е. В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 2002.

7. Галочкин А. И., Нестеров Ю. В., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.

8. Грибанов В. У., Титов И. И. Сборник упражнений по теории чисел. М.: Просвещение, 1964.

9. Девенпорт Г. Высшая арифметика. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.

10. Девенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

11. Formulalarni yozishda https://www.wiris.com/mathtype dasturidan foydalanildi.