UCHINCHI VA TO‘RTINCHI DARAJALI TENGLAMALARNI YECHISHNING BA‘ZI USULLARI

Bomurotov Sherbek Najmidinovich - Guliston davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi,
Axadova Mehriniso Ilxom qizi - Guliston davat pedagogika instituti talabasi

Kalit so‘zlar: Uchinchi darajali tenglama, to‘rtinchi darajali tenglama

Quyidagi berilgan uchinchi darajali tenglamani ikkala tarafini bosh koeffitsientga bo‘lib, hosil qilib olamiz:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

bu tenglamani quyidagi metod orqali ko‘rib chiqamiz:

(1) tenglamani ikkinchi darajali had qatnashmaydigan uchinchi darajali tenglamaga yangi noma‘lum y ga nisbatan almashtirish orqali hosil qilamiz. α ni (1) tenglamada $x = y + \alpha$ almashtirishni bajarish orqali yuqorida keltirigan shartni qanoatlantiruvchi uchinchi darajali tenglama hosil bo‘ladigan qilib tanlab olamiz. (1) tenglamada x ning o‘rniga $y+\alpha$ ni qo‘yib, y^2 ning koeffitsientini nolga tenglashdan $3\alpha + a = 0$ tenlama kelib chiqadi.Bu tenglamadan $\alpha = -\frac{a}{3}$ topamiz.

Yuqorida aytib o‘tganlarimizdan kelib chiqadiki, (1) tenglamada

$$x = y - \frac{a}{3} \qquad (2)$$

almashtirishni bajarish orqali,

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (3)$$

hosil qilamiz, bunda :

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \qquad (4)$$

(3)- tenglama uchinchi darajali tenglamaning normal shakli deyiladi. Bu tenglamani echish uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$y = u + v$

bu erda u va v lar yangi noma‘lumlar.

Bu ifodani (3) tenglamaga qo‘yish orqali, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q=0 \qquad (5)$$

bundan:

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0 \qquad (6)$$

Endi, u va v larni shunday belgilash kiritib olamizki, unda quyidagi shartlarnibajarishi zarur:

$$3uv + p = 0 \ \ yoki \ \ uv = \frac{p}{3} \qquad (7)$$

Keyin (6) va (7) lardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, u^3 va v^3 ushbu quyidagi kvadrat tenglamaning ildizlaridan iborat bo‘ladi.

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Bu tenglamani echib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}$$

yoki

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad va \quad v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

bundan (5) ga ko'ra:

$$y = u + v = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (8)$$

(8) tenglik, odatda, Kardano formulasi deb ataladi.Bu tenglik ikkita ildizning yig'indisidan iborat bo'lib, har bir ildiz uchta qiymatga ega: u ning har bir qiymatini v ning har bir qiymati bilan olsak, y = u + v uchun hammasi bo'lib, to'qqizta qiymatdan hosil qilamiz.

Ammo (3) tenglama faqatgina uchta ildizga ega; Shu sababli, yuqoridagi to'qqizta qiymatdan uchtasini ya'ni y= u + v yig'indining (7) shartni qanoaytlantiruvchi qiymatlarini olishimiz kerak.Bundan avval

$$u = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

bu ildizning uchta qiymatini topamiz.Buning uchun, u ning bitta ildizini 1 ning birinchi darajali ildizlariga ko'paytirib chiqamiz.

$$\sqrt[3]{1} = cos\,0 + isin\,0 = 1,$$

$$\sqrt[3]{1} = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon$$

$$\sqrt[3]{1} = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2,$$

Natijada u ning uchinchi darajali ildizlari u_1, $u_2=\varepsilon u$, $u_3=\varepsilon^2 u$ hosil bo'ladi.

Endi v ning qiymatlarini yuqorida berilgan (7) shartga ko'ra topamiz:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}; \qquad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\varepsilon u_1} = \varepsilon^2\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon^2 v_1;$$

$$v_3 = -\frac{p}{3v_3} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 u_1} = \varepsilon\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon v_1,$$

bunda $\varepsilon^3 = 1$ dan foydalandik.Yuqorida keltirilgan (5) ga ko'ra u ning har bir qiymatini v ning har bir qiymatiga qo'shib hisoblaymiz va y uchun quyidagi uchta qiymat kelib chiqadi:

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \quad y_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1,$$

Agar bu tenglamalarga ε va ε^2 ning qiymatlarini qo'ysak, (3) normal tenglamaning ildizlari kelib chiqadi.Quyida buni keltirib o'tamiz;

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \qquad (9)$$

Endi (2) dan foydalanib, (1) tenglama ildizlarini topamiz:

$x_1 = u_1 + v_1 - \frac{a}{3}$,

$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}$,

$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}$. (10)

Misol: $x^3 + 9x^2 + 54x + 108 = 0$ tenglamani echilishini ko'rsatamiz. Bu erda $a = 9, b = 54, c = 54$ bo'ladi.Yuqorida berilgan (4) tenglikga asosan,

$p = 54 - \frac{81}{3} = 27, q = \frac{2\cdot 9^3}{27} - \frac{9\cdot 54}{3} + 108 = 0.$

Endi

$$u = \sqrt{0 + \sqrt{0 + \frac{27^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Agar $u_1 = 3$ desak, $v_1 = -\frac{729}{3\cdot 3} = -81$ hosil qilamiz.

Demak, (10)- tenglikga binoan, berilgan tenglamaning ildizlarini quyidagicha hosil qilamiz :

$$x_1 = 3 - 81 - 3 = -81$$

$x_2 = -\frac{1}{2}$(3-81) $+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3+81) -3 = -42 $+42\sqrt{3}\,i$

$x_3 = -\frac{1}{2}$(3-81) - $i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3+81) -3 = $-42 - 42\sqrt{3}\,i$.

Shu tarzda echiladi. Javoblari : $x_1 = -81$, $x_2 = -42 + 42\sqrt{3}i$, $x_3 = -42 - 42\sqrt{3}i$

To'rtinchi darajali tenglamalar

Kompleks sonlar maydonida berilgan to'rtinchi darajali tenglamaning ikkala tomonini bosh koeffitsiyentga bo'lish orqali quyidagilarni hosil qilamiz:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (11)

To'rtinchi tenglamani echishning bir nechta usullari bor.Biz ularning ba'zilarini ko'rib chiqamiz:

1).Ferrari usuli. (11) tenglamaning keying uchta hadini o'ng tomonga o'tkazib, ikkala tomoniga $\frac{a^2x^2}{4}$ ni qo'shamiz. Natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$$

Endi, so'nggi tenglamaning ikkala tomoniga

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 y + \frac{y^2}{4}$$

yig'indini qo'shib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \quad (12)$$

Yangi y noma'lumni (12) tenglamaning o'ng tomonini (12) tenglamaning o'ng tomoni to'liq kvadratdan iborat bo'lib qoladigan qilib tanlaymiz.Buning uchun

$$\left(\frac{a^2}{4}\right) - b + y = A^2,\ \frac{ay}{2} - c = 2AB,\ \frac{y^2}{4} - d = B^2 \qquad (13)$$

deb olishimiz kerak.Ushbu

$$4A^2B^2 = (2AB)^2$$

ayniyatga asosan, quyidagi natijaga kelamiz:

$$4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) - \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 \qquad (14)$$

Qavslarni ochib, y ning darajalariga nisbatan o'xshash hadlarni yig'sak, quyidagi shakldagi uchinchli tenglamaga kelamiz:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [d(a^2 - 4b) + c^2] = 0 \qquad (15)$$

Ma'lumki, y noma'lumning qiymatlari (14) tenglamaning ildizlaridir. Bu tenglamani hal qiluvchi tenglama yoki (13) tenglamaning rezolventasi deyiladi.

Agar (15) tenglamaning bironta ildizini y_0 bilan belgilab,bunda (14) tenglik bajariladi va (13) tenglikka asosan, (12) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = (\mathrm{Ax} + \mathrm{B})^2$$

yoki

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = \pm Ax + B$$

Demak, berilgan to'rtinchi darajali tenglama ikkita quyidagi kvadrat tenglamaning ko'paytmasiga yoyiladi:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = Ax + B$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = -Ax - B$$

Bu tenglamalarni echib, berilgan to'rtinchi darajali tenglamaning to'rtta ildizini topamiz.

2) Lobachevskiy usuli.

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} - \frac{a}{4} \qquad (16)$$

almashtirish orqali (11) tenglamani

$$y^4 + py^2 + qy + z = 0 \qquad (17)$$

shaklga keltiramiz.Bu tenglama to'rtinchi darajali tenglamaning normal shakli deyiladi.

Bu (17) tenglamaning istalgan ildizini y bilan belgilab, ushbu

$$z^3 - yz^2 + az + B = 0 \qquad (18)$$

Ushbu yordamchi tenglamani tuzamiz. Bu erda bizga α ning qiymati kerak emas, β ning qiymati esa keyinroq aniqlanadi. Agar (18) tenglamada z ni -z bilan almashtirsak,

$$z^3 + yz^2 + az - B = 0 \qquad (19)$$

tenglama kelib chiqadi. Oxirgi (18) va (19) tenglamalarni o'zaro ko'paytirib,

$$u^3 + lu^2 + mu - n = 0 \qquad (20)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $u = z^2$ va

$$l = 2\alpha - y^2,\ \ m = \alpha^2 + 2\beta y,\ \ \ n = \beta^2.$$

Bu tengliklarning birinchisi va uchinchisidan α va β ni aniqlab, ikkinchiga qo'ysak,

$$y^4 + 2l\,y^2 + 8\sqrt{n}\,y + (l^2 - 4m) = 0$$

Tenglama kelib chiqadi .Endi bu tenglamani yuqoridagi (17) tenglamadan iborat bo'lishini talab qilib,

$$2l = p,\ \ 8\sqrt{n} = q,\ \ l^2 - 4m = r$$

deb belgilaymiz, bundan

$$l = \frac{p}{2}, \qquad n = \frac{q^2}{64}, \qquad m = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right) \qquad (21)$$

hosil bo'ladi. $\beta^2 = n$ va $n = \frac{q^2}{64}$ tengliklarga asosan, $\beta = \frac{q}{8}$ deb hisoblaymiz.

(21) tenglikdan foydalanib, (20) tenglamani ushbu

$$u^3 + \frac{p}{2}n^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right)u - \frac{q^2}{64} = 0 \qquad (22)$$

Shaklga keltiramiz. Bu hal qiluvchi temglama yoki (17) tenglamaning rezolventasidir.

Agar $u_1,\ u_2,\ u_3$ bilan (22) tenglamaning ildizlarini belgilasak, z^2=4 ga asosan

$z_1 = \sqrt{u_1},\ \ z_2 = \sqrt{u_2}, z_3 = \sqrt{u_3}$ sonlar (18) tenglamaning ildizlari hisoblanadi. Shu sababli

$$z_1 + z_2 + z_3 = y,\ \ z_1 z_2 z_3 = -\beta = -\frac{q}{8}$$

shartlar bajariladi.

Ma'lumki z_1, z_2, z_3 qiymatlar $z_1 z_2 z_3 = -\frac{q}{8}$ shartni qanoatlantirsa

$$z_1, -z_2, -z_3;$$
$$-z_1, \quad z_2, -z_3;$$
$$-z_1, -z_2, \quad z_3;$$

qiymatlari ham shu shartni qanoatlantiradi. Demak, (17) tenglamaning ildizlari quyidagilardan iborat bo'ladi:

$$y_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$
$$y_2 = z_1 - z_2 - z_3,$$
$$y_3 = -z_1 + z_2 - z_3,$$
$$y_4 = -z_1 - z_2 + z_3$$

Bu qiymatlarni (6) ga qo'yib, (1) tenglamaning ildizlarini topamiz.

Misol:

$x^4 + 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{16} = 0$ tenglamani echaylik.Avval $x = y - 1$ almashtirishni bajarib,normal tenglamaga keltirib olamiz:

$$y^2 - \frac{7}{2}y^2 + y + \frac{21}{16} = 0$$

Bu erda $p = -\frac{7}{2}$, q=1 , r=$\frac{21}{16}$ berilgan bo'lib, (22) rezolventani tuzamiz:

$$u^3 - \frac{7}{4}u^2 + \frac{7}{16}u - \frac{1}{64} = 0.$$

Bu tenglamani ko'paytuvchilarga ajratib echish qulay.

$$\left(u^3 - \frac{1}{64}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) = \left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u^2 + \frac{1}{4}u + \frac{1}{16}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{16}\right) = 0.$$

Demak, $u_1=\frac{1}{4}$, $u_{2,3}=\frac{3\pm2\sqrt{2}}{4}$.

Bunda $q=1>0$ bo'lgani uchun, $z_1z_2z_3=-\frac{q}{8}=-\frac{1}{8}$ shartni qanoatlantirish maqsadida: $z_1=-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$, $z_{2,3}=+\sqrt{\frac{3\pm2\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ deb olamiz. Natijada:

$$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2+1}}{2}+\frac{\sqrt{2-1}}{2}-1=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2},$$
$$x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2+1}}{2}-\frac{\sqrt{2-1}}{2}-1=\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$$
$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2+1}}{2}-\frac{\sqrt{2-1}}{2}-1=\frac{1}{2}$$
$$x_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2+1}}{2}+\frac{\sqrt{2-1}}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR :

1. 1. Александров В. А., Горшенин С. М. Задачник-практикум по теории чисел. М.: Просвещение, 1972.

2. Баврин И. И., Фрибус Е. А. Старинные задачи. М.: Просвещение, 1994. 3. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

4. Василенко О . Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.

5. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

6. Галкин В. Я., Сычугов Д. Ю., Хорошилова Е. В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 2002.

7. Галочкин А. И., Нестеров Ю. В., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.

8. Грибанов В. У., Титов И. И. Сборник упражнений по теории чисел. М.: Просвещение, 1964.

9. Девенпорт Г. Высшая арифметика. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.

10. Девенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

11.Ayupov Sh.A., Omirov B.A.,Xudoyberdiyev A.X.,Haydarov F.H."Algebra va sonlar nazariyasi " o'quv qo'llanma; Toshkent – 2019.

12.Деза Е. И., Котова Л.В., "Сборник задач по теории чисел" Учебное пособие; Москва, "ЛИБРОКОМ" , 2012 й.

2-SHO‘BA

ANIQ FANLARNI O‘QITISHDA FANLARARO INTEGRATSIYA VA UNING TADBIQLARI