ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ТРУБОЙ И ПРОХОДЯЩЕЙ ПО НЕЙ ТЕПЛОНОСИТЕЛЬ

Жўрабек Маматов - старший преподаватель кафедры «Математике»
Гулистанский государственный университет
Нарбаев Фаррух - старший преподаватель кафедры «Математике»
Гулистанский государственный университет

Аннотация. В статье предлагается два дискретных модель процессе теплообмена между тонкой трубой и проходящей ней потоком теплоноситель (газ или жидкости). В первой модели температура труби стационарная. Для нее вывода явные формуле для температура выходящею теплоносителя. Во второй модель трубы теплоизолирована. В этом случае составлено система разложенных уравнений и получена формуле для решения.

Ключевые слова: математическая модель, процесс теплообмена, поток теплоносителя, дискретная система, жорданова форма, матричная алгебра.

Введение. В классическом подходе к изучению процесса теплообмена между потоком теплоносителя (газа и жидкость) и трубой модель выводится системы уравнений терма-газодинамики, которая решается при определенных начальных, краевых условий, а также условий смеж на границах разделения [1]. В большинство случаев выведения таким способом задачи не интегрируются в общим виде и для этого привлекается электронное вычислительное устройство.

Вывод система уравнений

Рассмотрим процесс теплообмена между термоизолированной трубой цилиндрической формы длины L. Небольшей толщины d и внешнего диаметра $2r$ и протекающему по ней потоком теплоносителя (газа или жидкости). Пусть с одного конца трубы входит поток теплоносителя с температурой T с постоянной скоростью v. Будем предполагать, где величины h, m, v и L связаны соотношением $L = v \cdot h \cdot m$, где m – число деления трубы.

Среднюю температуру k-ой части трубы A_k на промежутки времени $[(n-1)h, nh]$ обозначим $y_k(n)$, а порции температуру теплоносителя находяўейся в A_k – $x_k(n)$. Будем предполагать, что теплообмене между k – ой часть трубы и соответствующая порция теплоноситель происходит в соотвействим с линейным законом Ньютона:

$$x_1(n+1) = T,$$
$$x_k(n+1) = x_k(n) + \alpha h[x_k(n) - y_k(n)],$$
$$y_k(n+1) = y_k(n) + \beta h[y_k(n) - x_k(n)],$$

$k = \overline{1,m}$. (Таким образом, мы теплообменом между соседними частями трубы и соседними порциями теплоносителя пренебрегаем).

Тем самым получаем дискредитированную модель изучаемого процесса в виде системы линейных разностных уравнений

$z_{n+1} = Az_n + f_n$,

где

$$z = (x_2, x_3, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_m)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} = (1-\alpha h)L, \quad A_{12} = [\alpha hI \;\; 0], \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0^T \\ \beta h \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = (1-\beta h)I_{m-1}, \quad f_n = \begin{bmatrix} g_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_n = ((1-\alpha h)V_n,\ 0,\ \dots,\ 0)^T,$$

0 – нулевой вектор-столбец размерности $m-1$, I – единичная матрицы порядка $m-1$, $L = (l_{ij})$ – нижний косой ряд порядка $m-1$, т. е. на языке символа Кронекера $l_{ij} = \delta_{i+1,j}$, Если задавать начальное условие, $z_0(0) = z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, то решение задач Коши для системы (1) находится формулой

$$z_n = A^n z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k} f_k . \qquad (1)$$

Эта формула достаточна для расчета распределения температуры в модели если известен метод вычисления степеней матрицы A. Одного учитывая, что матриц A имеет размер $(2m-1)*(2m-1)$ и число m может быть достаточна большим, а также разреженность матрицы, естественно … задачу вычисления ее степеней. Оставшейся часть статьи посвящается этой задаче.

Приведение к жордановой форме.

Одним из способе вычислен. A^n состоит в приведению A к жорд

Опарывается собственному число 0 соответствует более одной клетке. Легко устоновить, что матрице A имеет собственные чисел 0 кратности $m-1$ и $1-\beta$ кратности m.

Теорема 1. Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J_A = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & (1-\beta)I \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Будем искать невырожденную матрицу P размера $(2m-1)\times(2m-1)$, удовлетворяющего условию

$$PA = J_A P . \qquad (2)$$

Пусть

$$P = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix},$$

где X, Y, Z, U – блоки размера $(m-1)\times(m-1)$, $(m-1)\times m$, $m\times(m-1)$, $m\times m$ соответственно. Такое представление матрица P позволяет

осуществить декомпозицию уравнения (2), а именно свести его к двум системам более низких порядков. В самом деле, приравняю блоки первой строки, получаем самостятельную систему

$$(1-\alpha)XL+\beta Y\begin{bmatrix}0^T\\ I\end{bmatrix}=LX, \qquad (3a)$$

$$\alpha X\left[I,0\right]+(1-\beta)Y=LY \qquad (3b)$$

и приравняв блоки второй строки систему

$$\begin{cases}(1-\alpha)ZL+\beta U\begin{bmatrix}0^T\\ I\end{bmatrix}=LZ+(1-\beta)Z & (4a)\\ \alpha Z\left[I,\,0\right]=LU & (4b)\end{cases}$$

Займемся решением системы (3*a*), (3*b*). Относительно неизвестных матриц X и Y. $X[I;0]=[X;0]$. Оказывается матрицу $Y\in M_{m-1,m}$ можно искать таким образом, ее последний столбец и первая строка нулевые, так что $Y=\left[Y',\,0\right]=\begin{bmatrix}0^T\\ \overline{Y}\end{bmatrix}$. Тогда (3b) можно написать в виде

$$X=\frac{1}{\alpha}LY-\frac{1-\beta}{\alpha}Y. \qquad (4)$$

Теперь подставляя (4) в (3a) получаем

$$\beta Y_{(m-1)(m)}\begin{bmatrix}0^T\\ I_{(m-1)(m-1)}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha}L^2Y_{(m-1)(m-1)}-\frac{1-\beta}{\alpha}LY_{(m-1)(m-1)}-$$
$$-\frac{1-\alpha}{\alpha}LY_{(m-1)(m-1)}L+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha}Y_{(m-1)(m-1)}L. \qquad (5)$$

Поэтому (5) можно переписать в виде

$$\beta Y_{(m-1)(m)}\begin{bmatrix}0^T\\ I\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha}L^2Y-\frac{1-\beta}{\alpha}LY-\frac{1-\alpha}{\alpha}L^2Q+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha}LQ \qquad (6)$$

где

$$Q=\begin{pmatrix}y_{22} & y_{23} & y_{24} & \cdots & y_{2(m-1)} & 0\\ y_{32} & y_{33} & y_{34} & \cdots & y_{3(m-1)} & 0\\ y_{42} & y_{43} & y_{44} & \cdots & y_{4(m-1)} & 0\\ y_{(m-1)2} & y_{(m-1)3} & y_{(m-1)4} & \cdots & y_{(m-1)(m-1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Из условий $y_{1i}=0$ $(i\geq 2)$ и $y_{jm}=0$ вытекает, что $LQ=Y_{(m-1)(m)}\begin{bmatrix}0^T\\ I\end{bmatrix}$. Тогда уравнение (6) имеет решение вида

$$Y=(y^c,Fy^c,F^2y^c,...,F^{m-2}y^c,0) \qquad (7)$$

Легко проверить что имеет место равенство $\overline{Y}L=LQ$ где y^c_{m-1} – произвольный постоянный вектор-столбец, $\Delta=1-\alpha-\beta$,

$$F=(\Delta I+(1-\alpha)L)^{-1}((1-\beta)E-L)L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{2\Delta+\alpha\beta}{\Delta^2} & \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^{m-2}(1-\alpha)^{m-3}(2\Delta+\alpha\beta)}{\Delta^{m-2}} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^{m-1}(1-\alpha)^{m-2}(2\Delta+\alpha\beta)}{\Delta^{m-1}} & \dots & \dots & \dots & \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $k-$ой степени матрицы F надо найти решение нижеприведённой системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_{m-k-1}=b_{k,1} \\ a_2x_{m-k-1}+a_1x_{m-k}=b_{k,2} \\ a_3x_{m-k-1}+a_2x_{m-k}+a_1x_{m-k+1}=b_{k,3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k-1}x_{m-k-1}+a_{k-2}x_{m-k}+a_{k-3}x_{m-k+1}+\dots+a_2x_{m-4}+a_1x_{m-3}=b_{k,k-1} \\ a_kx_{m-k-1}+a_{k-1}x_{m-k}+a_{k-2}x_{m-k+1}+\dots+a_3x_{m-4}+a_2x_{m-3}+a_1x_{m-2}=0 \end{cases}$$

Аналогично, получим уравнения для Z и U:

$$\begin{cases} (1-\alpha)ZL+\beta U\begin{bmatrix}0^T\\ I\end{bmatrix}=LZ+(1-\beta)Z \\ \alpha Z\left[I,\,0\right]=LU \end{cases} \qquad (8)$$

Из второго уравнения системы (8) имеем

$$Z_{(m)(m-1)}=\frac{1}{\alpha}L_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)} \qquad (9)$$

Подставив (9) в первое уравнение системы (8), получим

$$U_{(m)(m)}\begin{bmatrix}0^T\\ \beta I_{(m-1)(m-1)}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha}L^2_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)}+\frac{1-\beta}{\alpha}L_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)}-\frac{1-\alpha}{\alpha}L_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)}L_{(m-1)(m-1)} \quad (10)$$

После замены в (10) вида $U_{(m)(m-1)}L_{(m-1)(m-1)}=L_{(m)(m)}K_{(m)(m-1)}+P_{(m)(m-1)}$, уравнение (10) примет вид:

$$\beta U_{(m)(m-1)}=\frac{1}{\alpha}L^2_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)}+\frac{1-\beta}{\alpha}L_{(m)(m)}U_{(m)(m-1)}-\frac{1-\alpha}{\alpha}L^2_{(m)(m)}K_{(m)(m-1)}. \quad (11)$$

где

$$K=\begin{pmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2(m-1)} & 0 \\ u_{32} & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3(m-1)} & 0 \\ u_{42} & u_{43} & u_{44} & \dots & u_{4(m-1)} & 0 \\ u_{m2} & u_{m3} & u_{m4} & \dots & u_{m(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем общее решение вида

$$U_{(m)(m)}=(u_m^1, Su_m^1, S^2u_m^1, \dots, S^{m-2}u_m^1, S^{m-1}u_m^1) \qquad (12)$$

где

$$S=(\alpha\beta E-(1-\alpha)J)^{-1}(J+(1-\beta)E)J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\beta}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right] & \frac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(1-\alpha)^{m-3}}{\beta^{m-2}}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+1\right] & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(1-\alpha)^{m-2}}{\beta^{m-1}}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+1\right] & \dots & \dots & \dots & \frac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Литературы.

1. Prakash, Amit; Kumar, Manoj Numerical method for time-fractional gas dynamic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A 89 (2019), no. 3, 559–570.
2. Koldoba, A. V.; Ustyugova, G. V. A difference scheme with a symmetry analyzer for equations in gas dynamics. (Russian) *Mat. Model.* 31 (2019), no. 7, 45–57.
3. Galanina, A. M.; Favorskiĭ, A. P. Numerical solution gas dynamic equations in Lagrangian variables. (Russian) *Mat. Model.* 24 (2012), no. 12, 119–123.

4-SHO‘BA

UZLIKSIZ TA’LIM TIZIMIDA INNOVATSION YONDASHUVLAR, MUOMMOLAR VA YECHIMLAR