CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI “KRAMER” USULI ORQALI “MATHCAD” DASTURI YORDAMIDA YECHISH

Amanov Javlonbek Ulug‘bek o‘g‘li - CHDPU talabasi

Annotatsiya. Mazkur tadqiqot ishida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer usulidan foydalanish va bu jarayonni Mathcad dasturi orqali avtomatlashtirish masalasi ko‘rib chiqiladi. Ish davomida Kramer qoidasi, determinantlarni hisoblash usullari va Mathcad dasturida ularni amalga oshirish yo‘llari tahlil qilinadi. Natijalar chiziqli tenglamalar sistemasini tezkor va aniq yechishning samarali usullarini aniqlashga yo‘naltirilgan.

Kalit so‘zlar: Kramer usuli, chiziqli tenglamalar sistemasi, determinant, Mathcad, matritsa, algebraik yechim, avtomatlashtirish.

KIRISH. Matematik modellashtirish va hisoblash texnologiyalari rivojlanishi natijasida chiziqli tenglamalar sistemasini samarali yechish usullari muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bunday masalalar fizika, muhandislik, iqtisodiyot va boshqa ko‘plab fan sohalarida uchraydi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning turli usullari mavjud bo‘lib, ulardan biri Kramer usulidir. Ushbu usul determinantlar yordamida har bir noma’lumni aniq hisoblash imkonini beradi.

Mathcad dasturi esa matematik ifodalarni yozish, hisob-kitoblarni bajarish va vizual natijalar olish imkoniyatini beruvchi qulay vositalardan biridir. Ushbu tadqiqot ishida Kramer usulini Mathcad dasturida qanday amalga oshirish mumkinligi tahlil qilinadi, uning samaradorligi va qulayliklari baholanadi.

ASOSIY QISM. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli sistemadagi tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan hol uchun o‘rinli bo‘ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1.1)$$

ko‘rinishidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa determinantini d harfi bilan belgilaylik:

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

10-mavzuda berilgan determinantni satr yoki ustun bo'yicha yoyish xossalaridan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{1,j}A_{n,j} \qquad (1.2)$$

Bundan tashqari,

$$a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j} = 0,\ i \neq j. \qquad (1.3)$$

Ya'ni, determinantning birorta ustunidagi hamma elementlarini boshqa ustunning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paymalari yig'indisi nolga teng.

Agar $d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{1,j}A_{n,j}$ yoyilmada j-ustunning elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasini $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo'ladigan

$$b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \cdots + b_nA_{n,j} \qquad (1.4)$$

ifoda d determinantning j-ustunini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladigan ushbu

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & b_2 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantning j-ustun bo'yicha yoyilmasi bo'ladi.

Teorema. Agar (1.1) sistemaning determinanti d noldan farqli bo'lsa, u holda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d} \qquad (1.5)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuliga *Kramer usuli* deyiladi.

Demak, Kramer usuli determinanti noldan farqli bo'lgan n ta noma'lumli n ta tenglamadan iborat iborat chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topishga imkonini beradi.

Sistema determinanti nolga teng bo'lgan hollarda Kramer usulini qo'llash maqsadida muvofiq emas. Chunki bu holatda tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi[13].

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish uchun quyidagi misolni keltiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

[13] Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Xudoyberdiyev A.X., Haydarov F.H. Algebra va sonlar nazariyasi (o'quv qo'llanma). UO'K: 338.45:69075.8 KBK: 65.31ya73. A 13. "Tafakkur-bo'stoni". Toshkent – 2019.

Agar (2.1) tenglamalar sistemasining determinanti noldan farqli bo'lsa, ya'ni, $A \cdot X = B$, $\Delta = detA \neq 0$ bo'lsa, u holda tenglamalar sistemasining yagona $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yechimi $x_i = \Delta i/\Delta$ Kramer qoidasi orqali topish mumkin.

Dastlab sistemani matritsa ko'rinishida yozib olinadi.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta := |A|, \quad \Delta = 27$$

Hisoblangan bosh determinantning noldan farqli ekanligi yechimning mavjud va yagonaligini anglatadi.

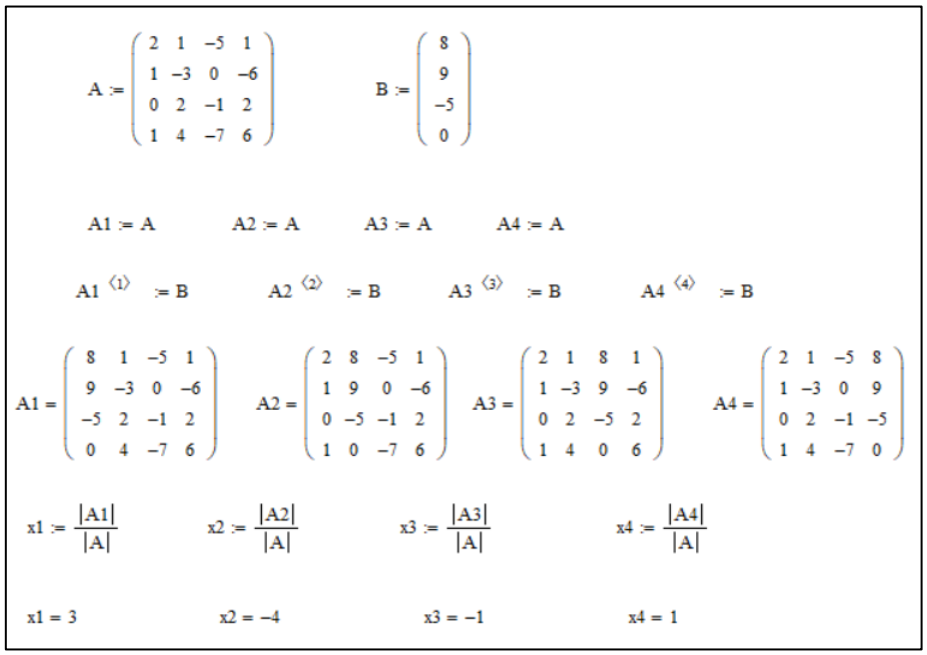
Noma'lumlar oldidagi koeffitsentlarni o'ng tomondagi ustun elementlari bilan almashtirib, quyidagi matritsalar tuziladi va har bir xususiy matritsa uchun alohida determinantlar aniqlanadi. Natijada sistemaning barcha ildizlari ketma-ket, tartib bilan yuqoridagi Kramer formulasi yordamida aniqlanadi.

$$A2 := \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}; \quad \Delta 2 := |A2|; \quad x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta}; \quad x2 = -1;$$

$$A1 := \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}; \quad \Delta 1 := |A1|; \quad x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta}; \quad x1 = 3;$$

$$A3 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad \Delta 3 := |A1|; \quad x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta}; \quad x3 = -27;$$

$$A4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta 4 := |A4|; \quad x4 := \frac{\Delta 4}{\Delta}; \quad x4 = -1;$$



1-rasm. Yuqorida keltirilgan misolning “MathCad” dasturida berilgan versiyasi.

XULOSA. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, Kramer usuli yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini aniq va tez yechish mumkin. Ushbu usul, ayniqsa, noma’lumlar soni nisbatan kam bo‘lgan sistemalar uchun samarali hisoblanadi. Mathcad dasturi esa bu jarayonni avtomatlashtirish va natijalarni vizual tarzda taqdim etish imkonini beradi. Bu esa nafaqat hisoblash jarayonini soddalashtiradi, balki o‘quv jarayonida ham samarali qo‘llanilishi mumkinligini tasdiqlaydi. Kelgusida Mathcad dasturining boshqa algebraik usullar bilan integratsiyasi va murakkab sistemalar uchun qo‘llanishi bo‘yicha tadqiqotlar olib borish maqsadga muvofiqdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES):

1. Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Xudoyberdiyev A.X., Haydarov F.H. Algebra va sonlar nazariyasi (o‘quv qo‘llanma). UO‘K: 338.45:69075.8 KBK: 65.31ya73. A 13. “Tafakkur-bo‘stoni”. Toshkent – 2019.
2. Новиковский Е.А. Работа в MathCAD 15 *(Учебное пасобие)*. «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» (АлтГТУ). Барнаул – 2013.
3. Kreyszig E. "Advanced Engineering Mathematics" – John Wiley & Sons, 2011.
4. Strang G. "Linear Algebra and Its Applications" – Cengage Learning, 2016.
5. Bronshtein I. N., Semendyayev K. A. "Handbook of Mathematics" – Springer, 2007.
6. Mathcad rasmiy hujjatlari: https://www.mathcad.com/
7. Anton H., Rorres C. "Elementary Linear Algebra" – Wiley, 2010.
8. Lay D. C. "Linear Algebra and Its Applications" – Pearson, 2015.
9. Lipschutz S., Lipson M. "Schaum's Outline of Linear Algebra" – McGraw-Hill, 2009.
10. Chapra S. C., Canale R. P. "Numerical Methods for Engineers" – McGraw-Hill, 2015.