BA’ZI KIMYOVIY MASALALARNI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI ORQALI GAUSS USULI ORQALI YECHISH.

Hamroyeva Dilso‘z Yahyoyevna – assistant, Zarmed Universiteti “Boshlang‘ich ta’lim, pedagogika va psixologiya” kafedrasi assistenti.
mohlaroyim261218@gmail.com
Atavulloyev Hafiz Hayotovich - assistent, Buxoro davlat tibbiyot instituti, “Tibbiy kimyo kafedrasi” assistenti. E-mail :
hafizhayotovich@gmail.com

Annotatsiya. Amaliyotda juda ko‘plab masalalarni hal qilishda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan foydalanish qulay hisoblanadi. Bu iqtisodiyotda ham, kimyo sanoatida ham ko‘plab jarayonlarni modellashtirish orqali o‘rganish imkoniyatini yaratadi. Kimyo fanini o‘qitish jarayonida ham chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullaridan foydalanish ko‘pgina muammoli vaziyatlarda ijobiy natija beradi.

Kalit so‘zlar: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, Gauss metodi, matritsa. Kimyoviy masala , molekulyar massa .

Respublikamizda bo‘layotgan ijobiy o‘zgarishlar ta’lim sohasida ham ma’lum yangiliklar, tubdan o‘zgarishlar bo‘lishini taqazo etadi. Haqiqatdan ham, chuqur bilimli, keng dunyoqarashli komil shaxsni tarbiyalash masalasi pedogoglardan yangicha ishlash prinsiplarini amalga oshirishni talab qiladi va katta mas’uliyat yuklaydi.

O‘quvchilarning mustaqil ishlashi uchun sharoit yaratish, predmetga qiziqtirish, turmushda bo‘ladigan hodisalarni chuqur anglatishni maktabda olingan bilimlar yordamida amalga oshirish-zamonaviy o‘qituvchining vazifasi.

Kimyo predmetini o‘qitishda o‘quvchilarni mustaqil ishlashga, atrofdagi hodisalarni talqin etishda kimyoviy bilimlarni qo‘llay olishga qaratmoq lozim.

Bugungi kunda ko‘pgina amaliy masalalarni yechishda fanlar aro bog‘liqlik hamkorlikni ko‘rish qilish mumkin. Shuningdek bir qancha fanlar va ularning integratsiyasidan yangi fan tarmoqlari, yo‘nalishlari paydo bo‘lmoqda. Masalan genetika, bioinformatika, polimerlar kimyosi va hokazo. Xususan, kimyoviy masalalarni yechishda kimyo fani qonuniyatlaridan foydalanib, masalaning matematik modelini tuziladi, hamda matematik bilimlaridan foydalanib, algebraik tenglamalar sistemasi turli metodlar orqali yechiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi shunday ko‘rinishdagi sistemaki, bunda noma’lumlar 1- daraja bilan qatnashadi. Hamda masalani yechishda noma’lumlar soni va tenglamalar soni teng bo‘lishi muhim. Shuningdek tenglamalar sistemasining bir

tenglamasi qolgan tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lmasligi, chunki bu holda masala Kroneker-Kopelli teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi mumkin asosiy matritsaning ranki va kengaytirilgan matritsaning ranki teng bo‘lib, nomalumlar soniga teng bo‘lmasa tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmasligi mumkin.[1]

Biz bu yerda, matritsa tushunchasidan foydalandik. Aslida matritsani qanday tasavvur qilish mumkin?

Matritsalar va ularning turlari.

Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko‘p qo‘llaniladigan tushuncha bo‘lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko‘rinishda ifodalanadi.

TA'RIF: m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m \times n$ tartibli ***matritsa,*** uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A,B,C,\ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa 2×3 tartibli, ya’ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko‘rinishidagi 2·3=6 ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11}=1$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1.2$ va 2-satr elementlari $a_{21}=0$, $a_{22}=7.5$, $a_{23}=-1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11}=1$ va $a_{21}=0$, 2-ustuni $a_{12}=-3$ va $a_{22}=7,5$, 3-ustuni esa $a_{13}=1.2$ va $a_{23}=-1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko‘rsatishga ehtiyoj bo‘lsa, u $A_{m\times n}$ ko‘rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ko‘rinishda ifodalanadi.

TA'RIF: A_{mxn} matritsada $m = n \neq 1$ bo‘lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m \neq n$ ($m\neq1$, $n\neq1$) bo‘lsa ***to‘g‘ri burchakli matritsa*** , $m=1$, $n\neq1$ holda ***satr matritsa*** va $m\neq1$, $n=1$ bo‘lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, xalq xo‘jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o‘zaro mahsulot ayirboshlash $A_n=(a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij} ($i,j=1,2,\ldots,n$ va $i\neq j$) i-

tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning *j*-tarmoq uchun mo'ljallangan miqdorini, a_{ii} (*i*=1,2, … , *n*) esa *i*-tarmoqning o'zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, *m*=1 va *n*=1 bo'lganda $A_{1\times1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma'lum bir ma'noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.[9]

Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi.

Ko'pgina amaliy, jumladan iqtisodiy, masalalar chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasiga olib keladi.

1-TA'RIF: *n* noma'lumli *m* ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb quyidagi ko'rinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (*i*=1,2, …, *m*; *j*=1,2, …, *n*) –berilgan va ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsiyentlari***, b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu sistemada x_j (*j*=1, 2, … , *n*) noma'lumlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yig'indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad (2)$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to'rtburchakli *A* matritsani , x_j noma'lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan *X* va *B* ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Unda, matritsalarni ko'paytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay bo'lgan quyidagi matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX=B\,. \qquad (4)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasi iqtisodiy masalalarni yechishda ham juda keng qo'llanishini aytib o'tgan edik. Masalan, xom ashyolardan foydalanishni eng katta foyda beradigan yo'lini topish, transportda yuk tashishni tashkil etishda eng kam xarajatga erishish, chorvachilikda mollar ozuqasi ratsionini oqilona tuzish va hokazo. Bunday masalalarni o'rganish va yechish natijasida "Chiziqli dasturlash" deb

ataladigan matematikaning yangi bir yo‘nalishi yaratildi va unda chiziqli tenglamalar sistemasi ishlatiladi[10].

Biz quyidagi kimyoviy masalani tenglamalar sistemasiga keltirib, uni Gauss usuli orqali yechishni ko‘rib o‘tamiz.

Bizga $CuCl_2 \cdot 2H_2O$, $Pb(NO_3)_2$ *va* $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ *dan iborat aralashma berilgan. Bu aralashma 7,46 grammi suvda eritildi va hosil qilingan eritma teng uch qismga bo‘lindi.Eritmaning bir qismiga mo‘l* $AgNO_3$ *ta’sir ettirilganda 2,87 g cho‘kma va ikkinchi qismiga sulfat kislotaning suyultirilgan eritmasidan ortiqcha ta’sir ettirilganda 2,68g cho‘kma hosil bo‘lgan. Dastlabki tuzlar aralashmasida har bir tuzdan (kristallizatsiya) suvisiz qanchadan bo‘lganini hisoblash kerak bo‘lsin.*

Bu masalani yechish jarayonida dastlab har bir tuzning molekulyar massasini topamiz:

$$\mu_{Cu\ Cl_2 \cdot 2H_2O} = 171\ g$$
$$\mu_{Pb(NO_3)_2} = 331\ g$$
$$\mu_{Ba\ Cl_2 \cdot 2H_2O} = 244\ g$$

Har bir tuzning modda miqdorlarini mos ravishda X,Y,Z orqali ifodalab olamiz va mos ravishda massasini (m_1, m_2, m_3) topamiz:

171 g $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ 1 mol bo‘lsa, uning m_1 grami X mol bo‘ladi. Bundan $m_1 = 171 \cdot X$;

Shu yo‘l bilan $Pb(NO_3)_2$ ning massasi $m_2 = 331 \cdot Y$.

Va $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ massasi $m_3 = 244 \cdot Z$ bo‘ladi.

Bu ifodalardan foydalanib, quyidagi tenglamani tuzamiz:

$$171 \cdot X + 331 \cdot Y + 244 \cdot Z = 7{,}46 \quad (1)$$

Aralashmaga $AgNO_3$ eritmasi quyilganda mis va bariy xlorid cho‘kma hosil qiladi:

$$CuCl_2 + 2AgNO_3 = 2AgCl + Cu(NO_3)_2$$
$$BaCl_2 + 2AgNO_3 = 2AgCl + Ba(NO_3)_2$$

Har birining 1 moli 2 moldan cho‘kma hosil qiladi. Reaksiyada hosil bo‘layotgan 2,87 g AgCl necha mol bo‘lishini topamiz:

143,5 g AgCl 1 mol bo‘lsa uning 2,87 grami $\frac{2{,}87}{143.5} = 0{,}02$ mol bo‘ladi. Yuqoridagi reaksiyadan ko‘rinib turibdiki, 0,02 mol hosil bo‘lishida xloridli tuzlardan 0,01 mol ishtirok etgan. Shuning uchun (X+Z) ning yarmi 0,01 bo‘lishi kerak:

$$\frac{X+Z}{2} = 0{,}01 \quad (2)$$

Aralashmaning H_2SO_4 bilan reaksiyasi [8]:

$$Pb\ (NO_3)_2 + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2HNO_3$$
$$BaCl_2 + H_2SO_4 = BaSO_4 + 2HCl$$

Bunda hosil bo‘lgan cho‘kmalarning molekulyar massalari $\mu_{PbSO_4} = 303\ g;\ \mu_{BaSO_4} = 233\ g$. Bu reaksiyalarda ham har bir tuzdan yarim moldan ishtirok etmoqda.U holda 0,5 mol $PbSO_4$ va 0,5 mol $BaSO_4$ dan qanchadan cho‘kma hosil bo‘lishini topamiz:

303 g $PbSO_4$ - 1 mol bo‘lsa, m_1 gramm tuz $0{,}5 \cdot Y$ mol bo‘ladi. $m_1 = 303 \cdot \frac{Y}{2}$

233 g $BaSO_4$- 1 mol bo‘lsa, m_2 gramm tuz $0{,}5 \cdot Z$ mol bo‘ladi. $m_2 = 233 \cdot \frac{Y}{2}$

Bu ifodalarning yig‘indisi 2,68 g cho‘kma og‘irligiga teng bo‘lishi kerak:

$$303 \cdot \frac{Y}{2} + 233 \cdot \frac{Z}{2} = 2{,}68 \quad (3)$$

Yuqoridagi tenglamalarni sistema qilsak,

$$\begin{cases} 171 \cdot X + 331 \cdot Y + 244 \cdot Z = 7{,}46 \\ \dfrac{X+Z}{2} = 0{,}01 \\ 303 \cdot \dfrac{Y}{2} + 233 \cdot \dfrac{Z}{2} = 2{,}68 \end{cases}$$

ko‘rinishdagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil bo‘ladi.

Bu sistemani ko‘rinishini qulayroq ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$\begin{cases} 171 \cdot X + 331 \cdot Y + 244 \cdot Z = 7{,}46 \\ X + Z = 0{,}02 \\ 303 \cdot Y + 233 \cdot Z = 5{,}36 \end{cases} \quad (*)$$

(*) chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli orqali yechamiz:

Dastlab noma’lum X,Y,Z larning oldidagi koeffitsiyentlardan foydalanib, quyidagi kengaytirilgan matritsani tuzib olamiz. Gauss usuliga ko‘ra asosiy matritsaning dioganalidan pastdagi elementlarini nolga aylantiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 171 & 331 & 244 & 7{,}46 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}02 \\ 0 & 303 & 233 & 5{,}36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 171 & 331 & 244 & 7{,}46 \\ 0 & 303 & 233 & 5{,}36 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}02 \end{array}\right) \sim$$

$[3 - satrni\ (-171) ga\ ko'paytirib\ 1$
$- satrga\ hadma\ had\ qo'shib\ yuboramiz\ va\ natijani\ 3$
$- satrga\ yozamiz]$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 171 & 331 & 244 & 7{,}46 \\ 0 & 303 & 233 & 5{,}36 \\ 0 & 331 & 73 & 4{,}04 \end{array}\right) \sim$$

$[keyingi\ qadamda\ 3 -$
$satrdagi\ har\ bir\ elementni\ \left(-\frac{303}{331}\right) ga\ ko'paytirib, 2 -$
$satr\ elementlariga\ qo'shibyuboramiz\ va\ natijani\ 3 - satrga\ yozamiz]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 171 & 331 & 244 & 7{,}46 \\ 0 & 303 & 233 & 5{,}36 \\ 0 & 0 & -\frac{55004}{331} & -\frac{550{,}04}{331} \end{array}\right)$$

Matritsa hosil bo‘ladi. Va bu matritsaning elementlari noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar va ozod hadlarni ifodalaydi. Bu matritsadan foydalanib, tenglamalar sistemasini qayta qurish mumkin bo‘ladi:

$$\begin{cases} 171X + 331Y + 244Z = 7{,}46 \\ 0 \cdot X + 303Y + 233Z = 5{,}36 \\ 0 \cdot X + 0 \cdot Y - \frac{55004}{331} \cdot Z = -\frac{550{,}04}{331} \end{cases} \Rightarrow$$

Quyidagi Z=0,01, Y=0,01, X=0,01 yechimga ega bo‘lamiz. Demak bu tuzlarning protsent miqdorlari quyidagicha bo‘ladi:

0,01 mol $Cu\,Cl_2$ - 1.35 gramm bo‘ladi. Bu esa, 7,46gramm aralashmaning 18% i; 0,01 mol $Pb\,(NO_3)_2$ 3,31 gramm bo‘lad; 0,01mol $BaCl_2$ 2,08 gramm bo‘lsa, bu aralalashmaning 28% ini tashkil qiladi.

Bu aralashmadagi suv esa 10% ni (0,72 gramm) tashkil qilar ekan.

Bu kabi amaliyotda qo‘llaniluvchi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usuli noma’lumlar soni ko‘payganda, tenglamalar sistemasini yechishning boshqa usullaridan afzal ekanligini ko‘rsatadi.

Fanlar aro bog‘liqlik kimyoning nafaqat masala va mashqlari va ishlab chiqarish muammolari , suv undagi ionlarni hisoblash , katalizatorlarning faollik holati ,regeneratsiyalsh jarayonidagi hisoblashlarda qo‘llanilishi mumkin .

Ushbu maqolada kimyoviy muammolarga matematik hisoblashlar asosida ekspres yechim topish yo‘llari ishlab chiqildi .

Foydalanilgan adabiyotlar .

1. Claudio Canuto, Anta Tabacco. Mathematical Analysis I, (II). Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008 (2015).
2. B.A.Xudayarov Matematika. I-qism. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Toshkent, “Fan va texnologiya”, 2018. 284 b.
3. B.A.Xudayarov “Matematikadan misol va masalalar to‘plami” Toshkent “O‘zbekiston” 2018 yil. 304 b.
4. F.Rajabov va boshq. “Oliy matematika”, Toshkent “O‘zbekiston” 2007 yil. 400 b.
5. P.E.Danko va boshqalar. “Oliy matematika misol va masalalarda” Toshkent, “O‘qituvchi” 2007 yil. 136 b.
6. B.A.Xudayarov Individualnыy sbornik zadanie po matematiki. Tashkent. “O‘qituvchi” 2018 y. 168 b.
7. Ю.Ю .Лурье “ Аналитическая химия промышленных сточных вод”1984 г 197-200 с.
8. David Harvey “Modern Analytical Chemistry” DePauw University 2000y ,243p
9. T.Jo‘raev va boshq. “Oliy matematika asoslari” Toshkent “O‘zbekiston” 1995 yil 300 b.
10. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.,Наука, 1987.335 с.