ПЛОСКАЯ СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Каландаров Азиз Абдукаюмович – проректор по учебным делам Гулистанского государственного педагогического института
e-mail: abrorshox@mail.ru

Математическое и численное моделирование процесса деформирования с учетом взаимовлияния термических и механических факторов является актуальной проблемой термоупругости и математического моделирования. В механике, обычно при решении термоупругих задач температурное поле считается известным как решение уравнения теплопроводности. Но, для того чтобы более адекватнее описать процесс деформирования с учетом температуры, наряду с уравнениями движения необходимо рассмотреть уравнение притока тепла. Тогда краевая задача становится связанной относительно перемещений и температуры. При статическом случае, задача становится несвязанной, и механические и тепловые уравнения могут решены независимо друг от друга.

В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, соотношения между напряжениями и деформациями с учетом температуры, соотношения Коши, и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Все выше изложенные задачи термоупругости и термопластичности обычно решаются в перемещениях [1,2,3].

В последние время формулировка связанных задач термоупругости относительно напряжений и температуры, и их численное решение становится актуальной. Обычно, краевые задачи в напряжениях рассматриваются в рамках уравнений Бельтрами-Мичелла. В этом направлении можно отметить работы Коновалова и др.

Данная работа посвящена формулировке связанной задачи динамической термоупругости без использования уравнений Бельтрами-Мичелла. При этом начальные и граничные условия заданы относительно напряжений и температуры.

Связанной задача плоской термоупругости в напряжениях состоит из следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\dfrac{2\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\lambda}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\gamma\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+\dfrac{2\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\lambda}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-\gamma\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}=\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}\right) \\ \lambda_0\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-(c_\varepsilon+2\alpha\gamma T)\dfrac{\partial T}{\partial t}- \\ -\gamma T\left(\dfrac{1}{2\mu}(1-\dfrac{2\lambda}{3\lambda+2\mu})(\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial t})\right)=0 \end{cases}$$

начальные условия:

$$\sigma_{11}(x,y,t)\big|_{t=0}=\phi_1,\quad \sigma_{22}(x,y,t)\big|_{t=0}=\phi_2,\quad \sigma_{12}(x,y,t)\big|_{t=0}=\phi_3,\quad T(x,y,t)\big|_{t=0}=T_0$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_1,\quad \left.\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_2,\quad \left.\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_3,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_4$$

и граничные условия

$$\sigma_{11}(x,y,t)\big|_{x=\Gamma}=\sigma_0,\quad \sigma_{22}(x,y,t)\big|_{x=\Gamma}=\bar{\sigma}_0,\quad \sigma_{12}(x,y,t)\big|_{x=\Gamma}=\bar{\bar{\sigma}}_0,\quad T(x,y,t)\big|_{x=\Gamma}=T_1,\quad T(x,y,t)\big|_{x=\Gamma}=T_2.$$

При численной реализации можно использовать явные или неявные конечно разностные уравнения.

В статье сформулирована связанная задача плоской термоупругости в напряжениях. При этом, краевая задача состоит из четырех уравнений вкючая уравнений притока тепла. В предложенной краевой задаче, в отличие от известных связанных задач, неизвестными являются три компоненты тензора напряжений и температура. Разностные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Численно решена плоская задача о термических напряжениях сводной пластины под действием температурных воздействие куполообразной формы. Сравнением результатов явных и неявных схем показана достоверность полученных результатов и справедливость предложенной связанной краевой задачи термоупругости в напряжениях.

Использованная литература

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости – М.: Мир, 1970. – 256 с.

2. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. -М.: МГУ, 1996. - 343с.

3. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю.С. Связанные задачи термоупругости и термопластичности. – Ташкент: «Fan va texnologiya», 2019. – 204 с.