О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА НЬЮТОНА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жамуратов Кенгаш, Турдимуродов Элмурод Миркомил угли -
Гулистанский государственный университет
e-mail: umarovhr@mail.ru

Рассмотрим следующую двухслойную задачу на полупрямой $x>0$, решение которой зависит от $l(s)$:

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial t}=a^2(x)\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{\mu},\quad (x,t)\in\Omega_{t_0}^{\infty}\setminus\{x:x=l(s)\},\qquad (1)$$

$$U^{(s)}\big|_{x=0}=\psi(t);U^{(s)}\big|_{t=t_0}=\varphi(x);U^{(s)}\big|_{x\to+\infty}=0,\ (2);$$

$$\left[U^{(s)}\right]\Big|_{x=l(s)}=0,\tilde{h}_1\frac{\partial U^{(s)}}{\partial x}\Big|_{x=l(s)-0}=\tilde{h}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial x}\Big|_{x=l(s)+0}.\quad (3)$$

где

$$\varepsilon=\begin{cases}f(U-\psi_0,t), U>\psi_0 (0<x<l(s))\\ 0,\ U<\psi_0 (l(s)<x<\infty),\end{cases}\quad \text{и}\quad a^2(x)=\begin{cases}a_1^2, 0<x<l(s)\quad (U>\psi_0)\\ a_2^2, l(s)<x<\infty\quad (U>\psi_0)\end{cases}$$

f,φ,ψ – достаточно гладкие известные функции, μ – некоторая положения постоянная, t_0 – момент времени в катаром $l(t_0)=0,\psi_0=\text{const}>0,l(s)>0,U^{(s)}=U^{(s)}(x,t)$ искомая функция, $\tilde{h}_1,\tilde{h}_2,a_1,a_2$ положительные постоянные.

В работе с помощью интегрального преобразования Лапласа-Карсона построена функция Грина двухслойной первой краевой задачи на полупрямой $x>0$ для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентам $l(s)=1$. В случае $l(s)\neq 1, l(s)>0$ она имеет вид:

$$g(x,t,\xi,\tau;l(s))=\begin{cases}g_1(x,t,\xi,\tau;l(s)),0<x,\xi<l(s)\\ g_2(x,t,\xi,\tau;l(s)),0<\xi<l(s)<x<\infty\\ g_3(x,t,\xi,\tau;l(s)),0<x<l(s)<\xi<\infty\\ g_4(x,t,\xi,\tau;l(s)),l(s)<x<\infty\end{cases}\qquad (4)$$

где

$$g_1(x,t,\xi,\tau;l(s))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\delta^n}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl(s)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl(s))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}-\right.$$

$$\left.-\delta\exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-x-\xi)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}-\delta\exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-|x-\xi|)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}.\right.$$

Аналогично определяются и $g_2, g_3, g_4, \delta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \lambda = \sqrt{\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}}; 0 < \lambda < 1.$

Пользуясь интегральным представлением [1] решения задачи (1)-(3), нетрудно получить следующее интегральное уравнение

$$U^{(s)}(x,t) = A^{(s)}U^{(s)} + B(x,t;l(s)).$$

Принимаем за приближенное решение задачи с подвижной границей $l(t)$ и $U(x,t)$ определяемые как решении системы функциональных уравнений

$$\left.\begin{aligned} U(x,t) &= AU + B(x,t;l(t)), \\ \psi_0 &= \left[AU + B(x,t;l(t))\right]_{x=l(t)} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Систему (4) запишем в виде матричного операторного уравнения:

$$P\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(U,l) \\ p_2(U,l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $p_1(U,l) = U - AU - B(x,t;l(t)),\ p_2(U,l) = \psi_0 - [AU + Bx,t;l(t)]_{x=l(t)}$.

Считаем, что областями действия и значений оператора $\rho\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ являются соответственно пространства C*и C, где $C^* = C_1 \cdot C_2;\ C_1 = \{U(x,t): U \in C[0,l]\cdot[t_0,T]\}$,

$C_2 = \left\{ l(t,x): l(t) = m(t)(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\alpha}, m(t) \in C_{[t_0 T]}\ \frac{1}{2} \le \alpha < 1 \right\};\ b = \max_{t_0 < t \le T} l(t) = l(T).$

Под знаком понимается прямое произведение. Определим нормы в пространствах

C^*, C_1 и C_2, $\|U\|_{C_1} = \max_{x,t}|U(x,t)|; \|l(t)\|_{C_2} = \max_t \left|(t-t_0)^{-\frac{1}{2}} l(t)\right|;$

$\left\|\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\right\|_{C^*} = \|U\|_{C_1} + \|l\|_{C_2};\ \left\|p\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\right\|_C = \|p_1(U,l)\|_C + \|p_2(U,l)\|_C.$

Теперь покажем, что нелинейная операция $p\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ при сделанных выше предположениях относительно функций φ, f, u значения x,t достаточно близких к t_0 имеет единственный нуль т.е. существует b C^* такой элемент $\begin{pmatrix} U^* \\ l^* \end{pmatrix}$, что $p\begin{pmatrix} U^* \\ l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, это утверждение следует из теоремы, доказанной в работах Л.В.Кантаровича, о сходимости процесса Ньютона для функциональных уравнений.

В начале рассмотрим случной $0 < x < l(t)$. Положим

$$l_0(t) = 2a_1(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\alpha}, \frac{1}{2} \le \alpha < 1, \qquad U_0(x,t) = B(x,t;l_0(t))$$

Тогда первое приближение процесса Ньютона находится решением следующего матричного уравнения относительно поправок

$$\Delta U(x,t)=U_1(x,t)-U_0(x,t) \quad \text{и} \quad \Delta l=l_1(t)-l_0(t):$$

$$\begin{pmatrix} P_{1U}'(U_0,l_0)\Delta U+P_{1l}'(U_0,l_0)\Delta l \\ P_{2U}'(U_0,l_0)\Delta U+P_{2l}'(U_0,l_0)\Delta l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -P_1(U_0,l_0) \\ -P_2(U_0,l_0) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Здесь

$$\mathrm{P_{1U}'(U_0,l_0)\Delta U=\Delta U+\frac{1}{\mu}\int_0^t d\tau\int_0^{l_1(\tau)} g_1(x,t;\xi,\tau;l_0(\tau))f_u'(U_0(\xi,\tau)-\psi_0,\tau)\Delta U(\xi,t)d\xi,}$$

$$\mathrm{P_{2U}'(U_0,l_0)\Delta U=\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^t d\tau\int_0^{l_0(\tau)} g_1(l(t),t,\xi,\tau;l_0(\tau))\cdot f_U'(U_0(\xi,\tau)-\psi_0,\tau)d\xi,}$$

где $P_{iu}', P_{il}'(i=1,2)$ – производные Фреше $f_y'(y,t)$ – обычная производная. Аналогичным образом вычисляются $P_{1l}'(U_0,l_0)\Delta l$ и $P_{2e}'(U_0,l_0)\Delta l$

Приступим κ получению оценок для норм

$$\left\|P\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right\|, \left\|\left(P'\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right)^{-1}\right\| \text{ и } \left\|P''\begin{pmatrix}U\\l\end{pmatrix}\right\|,$$

которые участвуют в неравенстве, обеспечивающем сходимость процесса Ньютона. По определению нормы

$$\left\|P\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right\|=\|P_1(U_0l_0)\|+\|P_2(U_0,l_0)\|=\max_{x,t}|p_1(U_0,l_0)|+\max_t|p_2(U_0,l_0)|$$

В силу предположений о гладкостях функции φ,ψ и f, после некоторых преобразований слагаемых левой части (4) полечим

$$\left\|P\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right\|\le\eta_1\equiv M_p\cdot(t-t_0)^\alpha, \frac{1}{2}\le\alpha<1, \qquad (6)$$

где M_p – положительная постоянная зависящая от данных задачи Получаем оценки сверху для $\left\|P'\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}^{-1}\right\|$. Если мы покажем, что матричное уравнение (5) разрешимо, то этот факт будет эквивалентен существованию и ограниченности, по норме обратного оператора $\left(P'\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right)^{-1}$. Решение матричного уравнения (5) равносильно системе интегральных уравнений Вольтера второго рода, которая разрешима, т.е. существует ограниченный по норме обратный оператор. И так $\left\|\left(P'\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right)^{-1}\right\|\le\eta_0$, (7). Теперь оцениваем в шаре $\left\|\begin{pmatrix}U\\l\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}U_0\\l_0\end{pmatrix}\right\|\le r$ вторую производную оператора $P\begin{pmatrix}U\\l\end{pmatrix}$ по номе пространства С. Не выписывая вторую производную, ввиду её громоздкости приведем лишь ход вычисления.

В начале находится первая производная $P'\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$, затем ладовая приращения аргументу $\Delta' U$ и $\Delta' l$ отличных от приращений ΔU и Δl, снова вычисляется производная таким образом вторая производная представляет билинейную операцию:

$$P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta' U \\ \Delta' l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P''_{1UU}\Delta U\Delta' U + P''_{1lU}\Delta l\Delta' U + P''_{1ll}\Delta l\cdot\Delta' l \\ P''_{2UU}\Delta U\Delta' U + P''_{2lU}\Delta l\Delta' U + P''_{2lC} + P''_{2ll}\Delta l\cdot\Delta' l \end{pmatrix}.$$

Выполняя соответствующие выкладки установим неравенства

$$\left\| P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta' U \\ \Delta' l \end{pmatrix} \right\| \le \eta_2 \left(\|\Delta U\| + \|\Delta l\|\right)\cdot\left(\|\Delta' U\| + \|\Delta' l\|\right).$$

Отсюда $\left\| P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} \right\| \le \eta_2$, (8) , где η_2 – ограниченная постоянная, зависящая от данных.

Как следует из оценок (6), (7), (8) существует такое $T_0 \in (t_0, T_0)$, что для всех $t \in (t_0, T_0)$ имеет место неравенство $h_0 = \eta_0^2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 < \frac{1}{2}$, тогда согласно приведенной в [1] теореме следует, что уравнение (4) имеет единственное в шаре $\left\| \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_0 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\| \le r < r_1, r_1 = \frac{1+\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0$ решение $\begin{pmatrix} U^* \\ l^* \end{pmatrix}$.

Замечание. Решение задачи (1)-(3) в области $l(t) < x < \infty$ явно выписывается с помощью функции Грина для указанной области, если только известно решение указанной задачи в области $0 < x < l(t)$.

Литература

1. Л.В.Кантарович, Акилов. Функциональный анализ. М., Наука, 1986.