ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КВАЗИ-ФИЛИФОРМНЫХ АЛГЕБР ЗИНБИЕЛЯ

Хабибулло Умаров - преподаватель кафедры математики Гулистанского государственного университета
e-mail: umarovhr@mail.ru

Настоящая работа посвящена изучению алгебр, являющимися Кошулево дуальными к алгебрам Лейбница [1]. Напомним, что понятие Кошулево дуальных алгебр было впервые введено в работе [2]. В работе [1] показано, что Кошулево дуальность алгебры Лейбница приводит к алгебре с тождеством

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) + x\circ(z\circ y).$$

В дальнейшем, алгебры, задающиеся этим тождеством, получили название алгебр Зинбиеля.

Для произвольной алгебры Зинбиеля определим следующие ряд:

$$A^1 = A,\ A^{k+1} = A \circ A^k,\ k \geq 1,$$

Определение 1. Алгебра Зинбиеля A называется *нильпотентной*, если существует $s \in N$ такое, что $A^s = 0$. Минимальное число s, обладающее таким свойством назы-ется *индексом нильпотентности* (*нильиндексом*) алгебры A, т.е. $A^{s-1} \neq 0$ и $A^s = 0$.

Нетрудно видеть, что индекс нильпотентности произвольной n-мерной нильпотентной алгебре не превосходит числа n+1.

Определение 2. n-мерная алгебра Зинбиеля A называется квази-филиформной, если $A^{n-2} \neq 0$ и $A^{n-1} = 0$.

Пусть A-квази-филиформная алгебра Зинбиеля. Положив $A_i = A^i/A^{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$, тогда получим естественным образом градуированную алгебру

$GrA = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_{n-2}$, где $A_i \circ A_j \subseteq A_{i+j}$.

Алгебру G назовем естественным образом градуированной, если $A \cong GrA$.

Пусть A – n-мерная градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля, тогда существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ такой, что $e_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n-2$.

Надо отметить, что $\dim A_1 > 1$. Действительно, если $\dim A_1 = 1$, то алгебра A однопорожденная и значит, является нуль-филиформной алгеброй Зинбиеля.

Не ограничивая общности, можно считать, что $e_{n-1} \in A_1$.

Алгебру Зинбиеля A, для которой выполняется условие $e_n \in A_r$, будем называть *алгеброй типа* $A_{(r)}$.

Лемма 1.[3] Пусть A - естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(r)}$. Тогда $r \leq 3$.

Классификация естественным образом градуированных квази-филиформных алгебра Зинбиеля типа $A_{(1)}$ и типа $A_{(2)}$ приводится в следующими теоремы.

Теорема 1.[3] Любая n-мерная ($n \geq 6$) естественным образом градуированном квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(1)}$ изоморфна алгебре:

$$KF_n^1(A_{(1)}): \quad e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j},\ 2 \leq i+j \leq n-2.$$

Теорема 2.[3] Любая n-мерная ($n \geq 8$) естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(2)}$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$KF_n^1(A_{(2)})$: $e_1 \circ e_{n-1} = e_n$, $e_{n-1} \circ e_1 = \alpha e_n$, $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}$, $2 \leq i+j \leq n-2$;

$KF_n^2(A_{(2)})$: $e_1 \circ e_{n-1} = e_n$, $e_{n-1} \circ e_1 = e_n$, $e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n$, $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}$, $2 \leq i+j \leq n-2$;

$KF_n^3(A_{(2)})$: $e_1 \circ e_{n-1} = e_n$, $e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n$, $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}$, $2 \leq i+j \leq n-2$;

$KF_n^4(A_{(2)})$: $e_{n-1} \circ e_1 = e_n$, $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}$, $2 \leq i+j \leq n-2$.

Классификация естественным образом градуированных квази-филиформных алгебра Зинбиеля приведена в работе [3].

Определение 3. Линейное преобразование d алгебры Зинбиеля A называется дифференцированием, если $d(x \circ y) = d(x) \circ y + x \circ d(y)$ для любых $x,y \in A$.

Зададим дифференцирование в алгебре $KF_n^s(A_{(r)})$ в виде:

$$d(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\, e_k \text{ при } 1 \leq i \leq n.$$

В следующей теореме приводится на основе классификации **теорема 1** описание дифференцирований квази-филиформных алгебр Зинбиеля типа $A_{(1)}$.

Теорема 3. Всякое дифференцирование алгебры $KF_n^1(A_{(1)})$ имеет следующий вид:

$$d := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n-2} & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1,n-2} & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n-2} & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{i+1,k} = C_k^i \alpha_{1,k-i}$ при $1 \le i \le n-3$, $i+1 \le j \le n-2$.

Отметим, что аналогичные теоремы получены также и для алгебр типа $A_{(2)}$ и типа $A_{(3)}$.

Список литературы

1. Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. // Math. Scand., –1995, –Vol. 77(2), –P. 189-196.

2. Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads. // Duke Math. J., –1994, –Vol. 76(1), –P.203-272.

3. Адашев Ж.К. Описание n мерных алгебр Зинбиеля нильиндекса k (n-2≤ k ≤ n+1). Автореф. дис….канд. физ.-мат. наук.–Ташкент:ИМИТ. 2011.– 94 с .