BIR NOMA'LUMLI TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI

Sattorova Dilorom Abdumalik qizi – Guliston davlat universiteti, Axborot texnologiyalari va fizika-matematika fakulteti 3-bosqich talabasi
E-manil: diloromsattorova2508@gmail.com

Hozirgi paytda amaliy matematikaning qator bo'limlari bo'yicha chuqur mazmunli darsliklar, ilmiy va o'quv qollanmafari mavjud. Ammo, ularni o'rganish uchun maxsus matematik tayyorgarlikka ega bo'imaganliklari tufayli bu fanni o'zlashtirishda qiynaladilar.Ayniqsa hisoblash matematikasi usullari har tomonlama tushunarli qilib yozilgan qo'llanma va darsliklar o'zbek tilida yetarli emasligi talabalar uchun bir qancha qiyinchiliklar tug'dirmoqda.Ildizlarni talab qilingan aniqlikda taqribiy qiymatini yetarli ravishda tez topadigan juda ko'p metodlar mavjud, shuni qayd qilish keraki, hozir bayon qilinadigan metodlar faqatgina ko'phadlar uchun emas, balki undan kengroq bo'lgan uzluksiz funksiyalar sinfi uchun ham tatbiq qilinadi.

Bundan buyon α ni $f(x)$ ko'phadning oddiy ildizi deb hisoblaymiz, chunki biz har doim karrali ildizlardan qutulishimiz mumkin va α ildiz a va b chegaralar bilan ajratilgan $a<\alpha<b$ deb faraz qilamiz:xususan, bundan $f(a), f(b)$ lar har xil ishoraga ega ekanligi kelib chiqadi.Biz hozir oddiy iterasiya (yoki ketma-ket yaqinlashish) metodi bilan bitta sonli tenglama misolida tanishamiz.

Iterasiya metodini qo'llash uchun $f(x)$=0 tenglama unga teng kuchli bo'lgan quyidagi

$$x=\varphi(x) \qquad (1)$$

Kanonik shaklga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo'lishi kerak.(1) tenglamaning ildizi yotgan atrofning biror nuqtasini izlanayotgan ildizning nolinchi yaqinlashish deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishni topish uchun (1) ning o'ng tomoniga x_0 ni qo'yamiz va hosil bo'lgan $\varphi(x_o)$ qiymatini x_1 bilan belgilaymiz, ya'ni $x_1=\varphi(x_0)$ (2) topilgan x_1 sonni (1) ning o'ng tomoniga qo'yib yangi son $x_2=\varphi(x_1)$ ni hosil ekan qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, n- yaqinlashish $\varphi(x)$ x_n ni (n-1) yaqinlashish x_{n-1} yordamida topamiz.

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \qquad (n=1,2,3,\dots) \qquad (3)$$

Bu formula yordamida topilgan sonlar ketma- ketligni limiti ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi \qquad (4)$$

mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, (3) tenglikning har ikkala tomoniga limitga o'tib $\xi = \lim_{m\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi)$ ya'ni $\xi = \varphi(\xi)$ ga ega bo'lamiz.Bu tenglikdan ko'rinadiki ξ berilgan tenglamaning ildizi ekan (4) limit mavjud bo'lgan holda iterasiya jarayoni yaqinlashuvchi deyiladi.Iterasiya metodi soda geometrik ma'noga ega va u quyidagidan iborat: $y = \varphi(x)$ egri chiziq bilan koordinatalar burchagi bissektrisasining kesishish nuqtasiga siniq chiziq bo'ylab harakat qilamiz,siniq chiziqning uchlari navbat bilan egri chiziq va bissektrisa ustida yotadi,tomonlari esa navbat bilan gorizontal va vertikal yo'nalgan bo'ladi.Madomiki, iterasiya jarayoni doim yaqinlashavermas ekan demak, bu jarayon yaqinlashishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerakligini aniqlash katta ahamiyatga ega.

1-Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$1)\,\varphi(x) \text{ funksiya } |x - x_0| \le \delta \qquad (5)$$

Oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalar uchun $\varphi(x)$ Lipshist shartini qanoatlantirsin. $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y| \quad (0 < q < 1) \qquad (6)$

2) Quyidagi tengsizliklar bajarilsin $|x - \varphi(x_0)| \le \eta, \ge \frac{\eta}{1-q} \le \delta \qquad (7)$

(5) oraliqda yagona ξ ildizga ega bo'lib , $\{x_n\}$ ketma –ketlik bu yechimga intiladi va intilish tezligi $|x_n - \xi| \le \frac{\eta}{1-q} \cdot q^n \qquad (8)$ tengsizlik bilan aniqlanadi.

Isbot. Avval induksiya metodini qo'llab, ixtiyoriy n uchun α_m ni qurish mumkinligini, x_n ning (5) oraliqda yotishligi va $|x_{n+1} - x_n| \le \eta \cdot q^n \qquad (9)$ tengsizlikning bajarilishini ko'rsatamiz.Agar n=0 bo'lsa x_1=4(x_0) bo'lgani uchun (9) tengsizlik (7) dan kelib chiqadi. Endi faraz qilaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ lar qurilgan bo'lib, ular (5) oraliqda yotsin va $|x_{k+1} - x_k| \le \eta \cdot q^k \ k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ tengsizliklar bajarilsin.Induksiya shartiga ko'ra x_n (5) da yotadi, $\varphi(x)$ (5) da aniqlangan,shuning uchun ham $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ni qurish mumkin.

Teoremani 1-shartidan $|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})| \le q|x_n - x_{n+1}|$ kelib chiqadi. Lekin $x_{n-1} va x_n$ uchun induksiya shartiga ko'ra $|x_n - x_{n-1}| \le \eta q^{n-1}$ o'rinli, demak,$|x_{n+1} - x_n| \le \eta \cdot q^n$ Bu esa x_{n+1} va x_n uchun (9) tengsizlikning bajarilishini ko'rsatadi.

Nihoyat, $|x_{n+1} - x_0| \le |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + ... + |x_1 - x_0| \le \eta \cdot q^n + \eta \cdot q^{n-1} + ... + \eta = \eta \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, < \frac{\eta}{1-q} \le \delta$ munosabatlar x_{n+1} ning (5) oraliqda yotishini ko'rsatadi.

Shu bilan isbot qilinishi talab etilgan mulohaza tasdiqlandi.Endi $\{x_n\}$ ning fundamental ketma–ketlik tashkil etishini ko'rsatamiz. (9) tengsizlikka ko'ra ixtiyoriy P natural son uchun $|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\ldots|x_{n+1}-x_n|\le\eta\cdot q^{n+p-1}+\ldots+\eta\cdot q^n<\frac{\eta}{1-q}\cdot q^n$ yoki

$$|x_{n+p}-x_n|\le\frac{\eta}{1-q}\cdot q^n. \qquad (10)$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni p ga bo'g'liq bo'lmaganligi va $0<q<1$ bo'lganidan $\{x_n\}$ ketma–ketlikning fundamentalligi va uning limiti $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ mavjudligi kelib chiqadi. $\{x_n\}$ ketma–ketlikning (5) oraliqda yotgani uchun ξ ham shu oraliqda yotadi. (6) shartdan $\varphi(x)$ ning uzluksizligi kelib chiqadi,shuning uchun ham $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ tengsizlikda limitga o'tib,(1) tenglamaning ildizi ekanini isbot qilamiz.Endi ξ ildizning (5) oraliqda yagonaligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, ξ (1) tenglamaning (5) oraliqdagi boshqa biror ildizi bo'lsin, $\xi=\xi$ ekaniniko'rsatamiz.Haqiqatdan ham (6) ga ko'ra $|\tilde{\xi}-\xi|=|\varphi(\tilde{\xi})-\varphi(\xi)|\le q|\tilde{\xi}-\xi|$ $0<q<1$ bo'lgani uchun bu munosabat faqat $\xi=\xi$ bo'lgandagina bajariladi.

Yaqinlashish tezligini ko'rsatuvchi (8) tengsizlikni keltirib chiqarish uchun (10) tengsizlikda $p\longrightarrow\infty$ limitga o'tish kifoyadir, Teorema isbot bo'ldi.

Izoh odatda, iteratsiya metodini qo'llayotganda ikkita: $x_{n-1}va\ x_n$ ketma-ket yaqinlashishlar berilgan aniqlik bilan ustma-ust tushsa, shu aniqlik bilan $\xi\cong x_n$ deb olinadi.Umuman olganda, bu fikr noto'g'ridir.

Masalan, $x=0{,}999\,x$ tenglamani ko'raylik, bu yerda $\varphi(x)=0{,}999\,x$, $q=0{,}999$. Dastlabki yaqinlashish x_0 ni 1 ga teng deb olib, bu tenglamani iterasiya metodi bilan yechamiz. U holda $x_1=0{,}999$ va $x_0-x_1=0{,}001$ bo'ladi, bu tenglamaning aniq ildizi $\xi=0$ esa x_1 dan 0,999 ga farq qiladi.

Yuqorida aytilgan fikirni faqat $|\varphi'(x)|\le q$ bo'lib, q birdan ancha kichik bo'lgandagina qo'llash mumkin.Buning to'g'riligini $q\le\frac{1}{2}$ bo'lganda quyidagicha ko'rsatish mumkin.Buning uchun $f(x)=x-\varphi(x)$ deb olamiz, u holda $f(\xi)=0$ va $f'(x)=1-\varphi'(x)\ge1-q$ bo'ladi. Shuning uchun ham

$$|x_n-\varphi(x_n)|=|f(x_n)-f(\xi)|=|x_n-\xi|\,|f'(\tilde{\xi}_n)|\ge(1-q)|x_n-\xi|\quad(\tilde{\xi}_n\in(x_n,\xi)),$$

Demak $|x_n-\xi|\le\frac{x_n-\varphi(x_n)}{1-q}$ va (6) ga ko'ra $|x_n-\varphi(x_n)|\le|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n)|\le q|x_n-x_{n-1}|$.

Bu tengsizliklardan esa $|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$ hosil bo‘ladi.

Agar, xususiy holda, $q \le \frac{1}{2}$ deb olsak, $|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$. bo‘ladi, ya’ni bu holda $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ dan $|\xi - x_n| < \varepsilon$ kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 6 oktyabrdagi PF-6079-son “Raqamli o‘zbekiston-2030” strategiyasini tasdiqlash va uni samarali amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risidagi Farmoni // Xalq so‘zi. – Toshkent, 2020 y. 6 oktyabr.

2. Isroilov. M.I. Hisoblash metodlari. Toshkent, O‘qituvchi, 1-qism, 2003, 2-qism, 2008.

3. Aloev R.D., Xudoyberganov M.O‘. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami.O‘zMU.O‘quv qo‘llanma.2008 y.110 b.

4. Ismatullaev G‘.P., Kosbergenova M.S. Hisoblash usullari. “Tafakkur-bo‘stoni”. Toshkent 2014.