GIL'BERT FAZOSINING ASOSIY XOSSALARI VA UNING TURLI MASALALARGA TADBIQI

Turdimurodov Elmurod Mirkomil o'g'li - Guliston davlat universiteti Matematika yo'nalishi magistatura talabasi
E-mail: elmurodturdimurodov1@gmail.com

Gilbert fazosi - chiziqli algebra va funksional analiz sohasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan matematik tushuncha. Gilbert fazosi, Evklid fazosining umumlashgan ko'rinishi bo'lib, cheksiz o'lchovli fazolar uchun ko'p qo'llaniladi.

- Gilbert fazosining asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

- Cheksiz o'lchovli vektor fazosi. Gilbert fazosi, cheksiz sondagi vektorlar yig'indisidan iborat bo'lgan fazodir.

- Ichki ko'paytirish operatori. Gilbert fazosida vektorlar orasida ichki ko'paytirish operatori aniqlanadi. Bu operator vektorlar orasidagi "masofa" tushunchasini ta'minlaydi.

- Metrika. Gilbert fazosida vektorlar orasidagi masofani belgilovchi metrika mavjud. Bu metrika vektorlar orasidagi "masofa" ni aniqlaydi.

- Gilbert fazosi va uning xususiyatlari turli sohalarda muhim ahamiyatga ega:

- Kvant mexanikasi. Gilbert fazosi, kvant mexanikadagi "holat fazosi" tushunchasini modellashtirish uchun keng qo'llaniladi.

- Operator nazariyasi. Gilbert fazosi, cheksiz o'lchovli operatorlar nazariyasi uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

- Funktsional analiz. Gilbert fazosi, funktsional analiz nazariyasida keng q`o'llaniladi. Jumladan, integrallar, differensial tenlamalar, cheksiz o'lchovli yig'indilar kabi murakkab matematik tushunchalar Gilbert fazosi orqali o'rganiladi.

- Signallar nazariyasi. Gilbert fazosi, signallar nazariyasi, sonli qayta ishlov berish va aloqa nazariyasi kabi sohalarda qo'llaniladi.

Chiziqli normalangan fazolar metrik fazo bo'lganligi uchun bunday fazolar uchun metrik fazolar uchun kiritilgan barcha tushunchalar, teoremalar o'rinli bo'ladi.

Ta`rif−1. E chiziqli fazo bo'lib, unda ikkita usul bilan norma kiritilgan bo'ladi: $\|x\|^{(1)}$, $\|x\|^{(2)}$. Agar shunday bir $\beta > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\|x\|^{(2)} \leq \beta\|x\|^{(1)}$

Tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\|x\|^{(2)}$ norma $\|x\|^{(1)}$ normaga bo'ysundirilgan deb aytiladi.Agar E chiziqli fazoda $\|x\|^{(2)}$ norma $\|x\|^{(1)}$ normaga bo'ysundirilgan bo'lsa, u holda $\{x_n\} \subset E$ ketma-ketlikning x nuqtaga $\|x\|^{(1)}$ norma bo'yicha yaqinlashishidan uning $\|x\|^{(2)}$ norm abo'yicha yaqinlashishi (shu x nuqtaga) kelib chiqadi.

Ta'rif−1. E chiziqli fazo bo'lib, unda ikki xil usul bilan norma kiritilgan bo'lsin: $\|x\|^{(1)}$, $\|x\|^{(2)}$. Agar shunday bir $\alpha > 0, \beta > 0$ sonlar mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\alpha\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \beta\|x\|^{(1)}$

Tengsizlik o'rinli bo'lsa u holda $\|x\|^{(1)}$ va $\|x\|^{(2)}$ normalar ekvivalent deb aytiladi.

Teorema−1. Ixtiyoriy haqiqiy (kompleks) chekli n o'lchovli chiziqli fazodagi barcha normalar ekvivalentdir.

E chiziqli fazo (normalangan) va undagi bo'sh bo'lmagan L to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif−2. Agar E chiziqli normalangan fazodagi L to'plam yopiq chiziqli ko'pxillikdan iborat bo'lsa, u holda L to'plam E chiziqli normalangan fazodagi qism fazo deyiladi.

Masalan, agar $C_{[a,b]}$ fazodagi barcha darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar to'plamini qarasak, u holda bu to'plam $C_{[a,b]}$ dagi qism fazo bo'ladi.Endi Gil`bert fazosi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif−3. H orqali kompleks vektor (chiziqli) fazoni belgilaylik. Agar H fazoning har bir x, y elementlari juftligiga quyidagi shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantiruvchi elementlar skalyar ko'paytmasi deb ataluvchi (x,y) kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, ya'ni:

$\overline{(y,x) = (x,y)}$;

$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$;

$(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ faqat va faqat x=0 bo'lsa, u holda H ni skalyar ko'paytmali fazo deymiz.Ta`rif−3. Dan ko'rinadiki

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda}(x, y_1) + \bar{\mu}(x, y_2)$$

(x, 0)=0=(0,y) kelib chiqadi. Xuddi shunday Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi $|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y)$ tengsizlik ham kelib chiqadi.

Agar skalyar ko'paytma kiritilgan H fazoda $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $(x \in H)$ deb olsak, H normalangan fazoga aylanadi. Haqiqatan ham norma aksiomalaridan 1^0 va 2^0 lari bajarilishi ko'rinib turibdi. 3^0 −uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz. $x, y \in H$ bo'lsin, u holda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = [\|x\| + \|y\|]^2$ yoki $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ta'rif−4. Agar H fazoda skalyar ko'paytmali munosabat bilan norma orqali kiritish mumkin bo'lsa, u holda bu H ni unitary fazo deymiz. Skalyar ko'paytma kiritilgan H fazo normalangan fazo ham bo'lgani uchun, normalangan fazo ega bo'lgan barcha xossalarga H fazo ham ega bo'ladi. Bundan tashqari

Skalyar ko'paytma uzluksizdir, ya`ni, agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ bo'lsa u holda $(x_n, y_n) \to (x, y)$ bo'ladi.

H fazodan olingan ixtiyoriy ikkita x, y elementlar uchun parallelogram tengligi deb ataluvchi

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (1)$$

**Ta`rif–5**. To‘la unitar fazolarni abstract Gil`bert fazolari deymiz. Shunday qilib abstract Gil`bert H fazosi quyidagi talablarni bajaradi;

H kompleks chiziqli (vektor) fazo.

H skalyar ko‘paytma kiritilgan fazo.

$x \in H$ bo‘lsa $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, ya`ni H normalangan fazo.

H fazo $\rho(x,y) = \|x-y\|$ metrika ma’nosida to‘la.

H fazoda ixtiyoriy $n \in N$ natural son uchun n ta chiziqli erkli elementlar mavjud, ya’ni H fazo cheksiz o‘lchovli bo‘lsin. Gil’bert fazosiga doir eng muhim bo‘lganmisollarni keltiramiz.

1-misol. l_2 kompleks chiziqli fazodagi ixtiyoriy ikkita $x = (x_1, x_{2,\dots\dots,} x_n, \dots)$ va $y = (y_1, y_{2,\dots\dots,} y_n, \dots)$ elementlar uchun $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ deb olinsa, bu fazo Gil`bert fazosidan iborat bo‘ladi.

2-misol. $L_2[a,b]$ kompleks chiziqli fazo. Bu fazo $[a,b]$ oraliqda aniqlangan kompleks qiymatli x(t) o‘lchovli funksiyalarning shunday to‘plamiki, bunda $\int_a^b |x(t)|^2 \rho(t)dt < +\infty$ bo‘lsin, bunda $\rho(t)$ haqiqiy qiymatli va $[a,b]$ oraliqning deyarli hamma joyida $\rho(x,y) \geq 0$ bo‘lib to‘liq o‘lchovli to‘plamda $\rho(t) > 0$ bo‘lsin. Agar $x(t), y(t) \in L_2, \rho[a,b]$ funksiyalar uchun $(x,y) = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)}\rho(t)dt$ deb olsak, u holda bu fazo Gil`bert fazosidan iborat bo‘ladi.

Xulosa qilib aytganda, Gilbert fazosi - matematik analiz va amaliy fanlar uchun juda muhim bo‘lgan abstrakt matematik tushunchadir. Uning xususiyatlari va Gilbert fazosida qo‘llaniladigan usullar turli murakkab ilmiy va amaliy masalalarni yechishga keng imkoniyatlar yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. J.I.Abdullayev, Yu.X.Eshqobilov, R.N.G‘anixo‘jayev. Funksional analiz (misol va m asalalar yechish) I qism. “Tafakkur bo‘stoni” Toshkent – 2015. 240 bet.

2. Saipnazarov J.M. Banax fazosida oshkormas funksiya haqidagi teoremaning tatbiqlari // Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences// Scientific Journal Impact Factor// Volume 1 | ISSUE 4 ISSN 2181-1784// SJIF 2021: 5.423, 166-172 bet.

3. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar. O‘quv qo‘llanma. Nukus. Bilim. 2009.

4. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.

5. О.С.Зикиров Математик физика тенгламалари. Ўқув қўлланма. - Т.: “Фан ва технология”. 2017, 320 бет.