# CHIZIQLI OPERATORLAR, FUNKSIONALLAR VA XAN-BANOX TEOREMASI

**Turdimurodov Elmurod Mirkomil o‘g‘li** - Guliston davlat universiteti Matematika yo‘nalishi magistatura talabasi
*E-mail: elmurodturdimurodov1@gmail.com*

Chiziqli operatorlar - bu lineer funksiyalar bo‘lib, ular vektorlar/funksiyalar orasidagi munosabatlarni ifodalaydi. Masalan, vektorlar maydoni ustida ta’sir etuvchi matritsalar, differensial operatorlar, integral operatorlar kabi. Chiziqli funksionallar esa vektorlar/funksiyalar ustida ta’sir etuvchi lineer funksiyalar, ya’ni vektorlarga/funksiyalarga raqam sonlarni o‘rnatishdir. Masalan, ixtiyoriy funktsiya ustida ta’sir etuvchi integrallash, dif’ferensiash operatorlari chiziqli funksionallardir.
Xan-Banax teoremasi - Funksional analiz va operatorlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo‘lgan teorema. Ushbu teorema bo‘yicha har qanday to‘liq normali fazoda (ya’ni Banax fazoda) chiziqli va uzluksiz funksional uzluksiz ravishda takrorlanadi. Boshqacha aytganda, har qanday chiziqli va uzluksiz funksional muayyan element orqali ifodalanadi.
Xan-Banax teoremasi quyidagi xulosalarni beradi:

- Har qanday chiziqli va uzluksiz funksional normali fazoda o‘zini chiziqli va uzluksiz element orqali ifodalanishini ta’minlaydi.
- Chiziqli va uzluksiz funksionallarning to‘plami Banax fazoning o‘zini Banax fazoni tashkil etadi.
- Chiziqli va uzluksiz funksionallar ustida o‘rnatilgan operatsiyalar (qo‘shish, ko‘paytirish) natijasida yangi chiziqli va uzluksiz funksionallar hosil bo‘ladi.
- Ushbu teorema funksional analiz va matematik fizika, optimallashtirish nazariyasi, integral va differensial tenlamalar kabi sohalarda keng qo‘llaniladi.

Haqiqiy sonlar ( yoki kompleks sonlar ) maydoni ustida qurilgan vektor ( chiziqli ) fazo odatda uch o‘lchovli evkilid fazosining umumlashmasidan iboratdir. Unda ikkita algibraik ammalar – vektorlarni qo‘shish va vektorlarni skalyarga ( songa ) ko‘paytirish ammalari o‘rnatilgan ( aniqlangan ) va bu amallar ayrim shartlarga bo‘ysunadilar.

K orqali haqiqiy yoki kompleks sonlar ( skalyarlar ) maydonini belgilaymiz.

**Ta`rif-1.** Agar X to‘plamning har bir ikkita x va y elementiga ularning yig`indisi deb ataluvchi va X ga tegishli x+y element aniqlangan va ixtiyoriy $x \in$ X element va $\lambda \in$ K son uchun ularning ko‘paytmasi deb ataluvchi $\lambda x \in$ X element aniqlangan, shuningdek bu operasialar quyidagi aksiomalarni

(x+y)+z=x+(y+z) ( qo‘shishning assosiativligi ) ;

x+y=y+x ( qo‘shishning kommutativligi ) ;

X to‘plamda ixtiyoriy $x \in X$ uchun x+$\theta$=x bo‘ladigan $\theta$ element mavjud, shuningdek $0 \cdot x = x$ tenglik ixtiyoriy $x \in X$ uchun bajariladi ;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ( distributivlik ) ;

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ( distributivlik ) ;

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ( ko‘paytirishning assosiativligi ) ;

$$1 \cdot x = x$$

Qanoatlantirsa bu X to‘plamni vektor fazo ( yoki chiziqli fazo ) deymiz.

K skalyar to‘plamning haqiqiy yoki kompleks sonlar to‘plami ekanligiga qarab chiziqli fazo haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo deyiladi.Endi chiziqli fazoga misollar keltiramiz.Chiziqli operatorlar va funksionallar tushunchasini kiritamiz.Faraz qilaylik K maydon ustida aniqlangan X va Y vektor ( chiziqli ) fazolar berilgan bo‘lsin.

**Ta`rif-2.** Agar X ni Y fazoga mos qo‘yuvchi ya`ni $U: X \to Y$ akslantirish barcha $\lambda, \mu \in K$ va barcha $x, y \in X$ lar uchun

$$U(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) \qquad (1)$$

Munosabatni qanoatlantirsa, bu $U$ akslantirish chiziqli akslantirish yoki chiziqli operator deyiladi. X ni $Y$ ga mos qo‘yuvchi barcha chiziqli akslantirishlar to‘plamini $L(X,Y)$ orqali belgilymiz. Bu chiziqli akslantirishlar operatorlar ustida quyidagi amallarni kiritsak ikkita $U_1, U_2 \in L(X,Y)$ uchun

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) \qquad (2)$$

va $U \in L(X,Y)$, $\lambda \in K$ bo‘lganda

$$U = \lambda U = \lambda U(x) \quad (x \in X) \qquad (3)$$

bu $L(X,Y)$-chiziqli operatorlar to‘plami chiziqli fazoni ( vektor fazoni ) tashkil etadi. Shuni ta`kidlash kerakki $L(X,Y)$ va nol element rolini $U(x) = 0 \quad (x \in X)$ o‘ynaydi. $U(-x) = (-1)U(x) = -U(x)$ bo‘lishi ravshan.

K $U = U^{-1}(0)$- akslantirish $U \in L(X,Y)$ akslantirishning yadrosi deyiladi. O‘zaro X ni $Y$ ga bir qiymatli akslantiruvchi akslantirishni X ni $Y$ ga mos qo‘yuvchi chiziqli izomorfizi .

**Ta`rif–3.** X vektor ( chiziqli ) fazoni $K$ skalyar maydonga ( haqiqiy yoki kompleks sonlar to‘plamiga ) mos qo‘yuvchi f chiziqli akslantirish funksional deyiladi.

X –ixtiyoriy vektor fazo bo‘lsin. (2) va (3) formulalar $L(X,K)$ –chiziqli funksionallar to‘plamini chiziqli ( vektor ) fazoga aylantiradi. Biroq $X$ kompleks chiziqli fazo bo‘lgan holda f funksionalni $\lambda$ kompleks songa ko‘paytirishni

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in X) \qquad (4)$$

Formula orqali kiritamiz.Agar $\lambda \in R$ bo‘lsa (4) dan (3) kelib chiqadi.Izoh.Funksional bo‘lmagan operatorlar uchun (3) tenglik chiziqli fazo bo‘lganda ham o‘rinli bo‘laveradi.

**Ta`rif–4.** X vektor fazo va E shu fazoning qism to‘plami bo‘lsin. Agar E dan olingan ixtiyoriy $x, y$ elementlar va $0 \leq \lambda \leq 1$ son uchun $\lambda x + (1-\lambda)y$ ko‘rinishdagi barcha elementlar yana E ga qarashli bo‘lsa, u holda E ni qavariq to‘plam deymiz.

Qavariq to‘plamga geometrik ma`no bersak, u $x$ va $y$ elementlarni tutashtiruvchi $[\lambda x + (1-\lambda)y;\ 0 \leq \lambda \leq 1]$ intervalning barcha elementlarini ham o‘z ichida saqlar ekan.

**Ta`rif–5.** X –vektor fazo. Agar X da aniqlangan funksiyasi ixtiyoriy $x_1, x_2$ elementlar juftligi uchun $p(x_1, x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ bajarilsa, bu p funksiyasi yarim additiv , agar $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\lambda \geq 0$ tenglik bajarilsa bu funksiyani musbat birjinsli, agar ixtiyoriy $\lambda$ uchun $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ tenglik bajarilsa p funksiani oddiy qilib birjinsli funksiyasi deymiz.

**Ta`rif–6.** Yarim additiv va musbat birjinsli funksiyani kalibrlovchi funksiyasi deymiz .

**Ta`rif–7.** Birjinsli kalibrlovchi funksiya p ni yarim to‘g`ri chiziq deymiz. Kalibrlovchi funksiya quyidagi xossalarga ega:

$p(0) = 0$ har qanday kalibrlovchi p funksiya uchun

Agar $p$ yarim to‘g`ri chiziq bo‘lsa, u holda $p(x) \geq 0, \forall x \in X$ bo‘ladi.

Agar $p$ –yarim to‘g`ri chiziq bo‘lsa, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$

**Ta`rif–7.** $X_0 \in X$ bo‘lsin $f_0$ ,$X_0$ to‘plamda aniqlangan biror funksiya bo‘lib $X$ da aniqlangan f funksiya uchun $\forall x \in X_0$ bo‘lganda $f_0(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa f ni $f_0$ ning davomi deyiladi.

Teorema (Xon–Banax ). $X_0 \subset X$ bo‘lgan chiziqli to‘plamda aniqlangan $f_0$ chiziqli funksional uchun

$$f(x) \leq p(x) \qquad (x \in X_0) \qquad (5)$$

tengsizlik bajarilsin. U holda $X$ da aniqlangan va $X_0$ va $f_0$ bilan ustma–ust tushadigan hamda $X$ da $f(x) \leq p(x)$ $(x \in X)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $f_0$ chiziqli funksional mavjud bo‘ladi.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR


1. J.I.Abdullayev, Yu.X.Eshqobilov, R.N.G‘anixo‘jayev. Funksional analiz (misol va m asalalar yechish) I qism. “Tafakkur bo‘stoni” Toshkent – 2015. 240 bet.
2. Abdullaev J.I., Ganixo‘jayev R.N. va b. Funksional analiz, Toshkent – Samarqand, 2009.
3. Саримсоқов Т.А. Функционал анализ курси. «Ўқитувчи» Т., 1986.
4. Sh.A.Ayupov va b. Funksional analizdan misol va masalalar, Nukus “Bilim”, 2009.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М. «Наука». 1980.